

YÜKSEK ÖĞRETİM KURULU DOKÜMANTASYON MERKEZİ
TEZ VERİ FORMU

Tez No:

Konu:

Üniv. Kodu:

Not: Bu bölüm merkeziniz tarafından doldurulacaktır.

Tezin yazarının

Soyadı: COŞKUN

Adı: Görkem

Tezin Türkçe adı: KAÜÇUK GÖVDELI
MOTOR TAKOZUNUN SONLU
ELEMENLAR YÖNTEMİYLE
MODELLEME, SİMÜLASYON VE
TESTLERİ

Tezin Yabancı adı: FEA AND
EXPERIMENTAL RESULTS OF A
RUBBER ENGINE SUPPORT

Tezin Yapıldığı

Üniversite: İ.T.Ü.

Enstitüsü: Fen Bilimleri

Yılı: 2004

Diğer Kuruluşlar:

Tezin Türü: 1- Yüksek Lisans

Dili: Türkçe

Sayfa Sayısı 313

Tez Danışmanlarının

Ünvanı: Doç. Dr.

Adı: Ata

Soyadı: MUĞAN

Türkçe anahtar kelimeler:

İngilizce anahtar kelimeler:

1- Doğrusal olmayan elastisite

1- Non-linear Elasticity

2- Histerisis

2- Hysterisis

3- Viskoelastisite

3- Viscoelasticity

4- Rijitlik kaybı

4- Loss of Stiffness

5- Pişme Koşulları

5- Curing Parameters

Tarih: 03.06.2004

İmza:

ÖNSÖZ

Bu çalışmam dahil, başarabildiğim ölçüde, hayatımda ortaya koyduğum her tür yapıtın kalıbı sayılabilecek kişilik oluşumumun belkemiğini teşkil etmiş olan; ruhsal ,sosyal ve akademik gelişimim için maddi ve manevi her türlü olanağı sonuna kadar sağlamış bulunan anne ve babama, ilkokuldan bu yana dağarcığıma birşeyler katabilmiş olan tüm hocalarıma, tez danışmanım Sn. Ata Muğan’a, sağladığı manevi destek, tez konusu kapsamında sanayinin akademisyenlerden beklentisi anlamında lojistik yönlendirme, yüksek lisans dersleri ve tez yazımı süresince okula devam hakkı için verdiği müsaade, tahsis ettiği test düzeneği, test ve yazılım kullanma imkanlarından ötürü, başta Genel Müdür Yardımcısı Sn. Necmi Can Uslu, Grup Müdür Yardımcısı Sn. Ertan Yazıcı ve Şefim Sn. Neriman Erülker olmak üzere tüm Teklas Kauçuk AŞ yönetimi ve çalışanlarına , MARC konusundaki teknik desteğinden ötürü Sn Ender Koç ve Sn Alex Ramsey’e çok teşekkür ederim.

Mayıs 2004

Görkem COŞKUN

İÇİNDEKİLER	Sayfa
	No
TABLO LİSTESİ	viii
ŞEKİL LİSTESİ	ix
SEMBOL LİSTESİ	xv
EK LİSTESİ	xviii
ÖZET	xix
SUMMARY	xx
1.GİRİŞ	1
2. Taşıt Motoru	2
2.1. Kauçuk Takozlara Uyguladığı Statik Yükleme Tipleri	3
2.2 Kauçuk Takozlara Uyguladığı Mekanik Titreşimler	4
2.3 Kauçuk Takozlara Uyguladığı Sürekli Statik Yükleme	5
2.4 Kauçuk Takozlara Uyguladığı Sürekli Dinamik Yükleme	6
2.4.1 Düşük Frekanstaki Sürekli Dinamik Yükleme	6
2.4.2 Yüksek Frekanstaki Sürekli Dinamik Yükleme	13
3. Motor Takoza Statik Testlerine Dair Temel Kavramlar	13
3.1.Gerilme Tensörü:	13
3.2 Gerinim Tensörü:	15
3.3 Simetrinin Gerinim ve Gerilme Tensörü Arasındaki Bağıntılara Etkisi	21
3.4 Modül Tensörüne Ait Bağımsız Bileşen Sayısı	22
3.5 İzotropik Katılar İçin Genelleştirilmiş Hook Prensibi	32
3.6 İdeal Elastik Sistemler İçin Genelleştirilmiş Gerilme-Gerinim İlişkileri	41

3.7 Uyum Fonksiyonları Arasındaki İlişkiler	43
3.8 Gerilmenin Silindirik Koordinatlardaki İfadelerinin Çıkartılması	44
3.8.1 dr eksenli bileşenleri için $\sum f_r = 0$	47
3.8.2 $d\theta$ eksenli bileşenleri için $\sum f_\theta = 0$	49
3.8.3 denklemi dz eksenli bileşenleri için $\sum f_z = 0$	51
3.9 Cauchy Gerilmesi, 1. ve 2. Piola Kirchoff Gerilmeleri	52
3.9.1 Cauchy Gerilme Tensörü	54
3.9.2 Cismin Malzemeye Bağlı ve Anlık Konumlara Bağlı Koordinatları	59
3.9.3 1. ve 2. Piola Kirchhoff Gerilme Tensörleri	65
3.10 Gerinim Enerjisi Fonksiyonu	71
3.10.1 Gerinim Enerji Fonksiyonu, Germe Oranına Göre Türevi, Gerilme ve	71
3.11 Kauçuğun, Yay-Damper Sistemi Tipleriyle Temsili	92
3.11.1 Maxwell Modeli	92
3.11.2 Kelvin-Voigt Modeli	92
3.11.3 Zeener Modeli	93
4. Malzeme özelliğinin Tespiti ve Sonlu Elemanlar Yazılımına Aktarımı	93
4.1 Kauçuk Plaka ve Parça Testleri, MARC'ta Yapılan Çözümlmeleri	93
5. Denek Hazırlama	96
6. Test Düzeneklerinin Hazırlanması ve Testlerin Yapılması	97
6.1 Test Düzeneklerinin Hazırlanması	98
6.2 Test Sonuçları	98
6.2.1 Tek Eksenli Çekme Test Sonuçları	99
6.2.2 İki Eksenli Çekme Test Sonuçları	101
6.2.3 Düzlem Kayma Gerilmesi Test Sonuçları	103
7 Test Sonuçlarının Yazılımı Girmek Üzere Hazırlanması	106
8. Girilen Sonuçlara Yazılımın Çakıştırdığı Eğriler	109

8.1.1 Hacim Sabitliğine Dayanan Matematik Yaklaşımlar	110
8.1.1.1 Tek Eksenli Gerilme İçin Neo-Hookean ve Hook ile Kıyası	110
8.1.1.2 Tek Eksenli Gerilme İçin Sabit Mooney	111
8.1.1.3 Tek Eksenli Gerilme İçin Orjinal Mooney	111
8.1.1.4 Tek Eksenli Gerilme İçin Mooney-Rivlin	111
8.1.1.5 Tek Eksenli Gerilme İçin Signiorini	111
8.1.1.6 Tek Eksenli Gerilme İçin Yeoh	112
8.1.1.7 Tek Eksenli Gerilme İçin James-Green-Simpson	112
8.1.2 Tek Eksenli Gerilme İçin Hacim Değişimi Hesaba Katan Yaklaşımlar	113
8.1.2.1 Tek Eksen İçin Ogden 2 modeli	113
8.2 İki Eksenli Gerilme Durumu	114
8.2.1 Hacim Sabitliğine Dayanan Matematik Yaklaşımlar	114
8.2.1.1 İki Eksenli Gerilme İçin Neo-Hookean ve Hook ile Kıyası	115
8.2.1.2 İki Eksenli Gerilme İçin Sabit Mooney	115
8.2.1.3 İki Eksenli Gerilme İçin Orjinal Mooney	115
8.2.1.4 İki Eksenli Gerilme İçin Mooney-Rivlin	115
8.2.1.5 İki Eksenli Gerilme İçin Signiorini	116
8.2.1.6 İki Eksenli Gerilme İçin Yeoh	116
8.2.1.7 İki Eksenli Gerilme İçin James-Green-Simpson	116
8.2.2 İki Eksenli Gerilme İçin Hacim Değişimini Hesaba Katan Yaklaşımlar	117
8.3 Düzlemsel Kayma Durumu	117
8.3.1 Hacim Sabitliğine Dayanan Matematik Yaklaşımlar	118
8.3.1.1 Düzlemsel Kayma İçin Neo-Hookean ve Hook ile Kıyası	118
8.3.1.2 Düzlemsel Kayma İçin Sabit Mooney	118
8.3.1.3 Düzlemsel Kayma İçin Orjinal Mooney	118
8.3.1.4 Düzlemsel Kayma İçin Mooney-Rivlin	118

8.3.1.5 Düzlemsel Kayma İçin Signiorini	118
8.3.1.6 Düzlemsel Kayma İçin Yeoh	119
8.3.1.7 Düzlemsel Kayma İçin James –Green -Simpson	119
8.3.2 Düzlemsel Kayma İçin Hacim Değişimini Hesaba Katan Yaklaşımlar	120
8.4 Sonuçların Yorumlanması	120
9. Nihai Malzeme Modelinin Tayini	124
10. Viskoelastisite	126
10.1 Viskoelastisite - Kuramsal Altyapı	129
10.1.1 Statik Viskoelastisite Kuramsal Altyapı	129
10.1.1.1 Kayma ve Yığılma Relaksasyon Modülleri	129
10.1.1.2 Kayma ve Yığılma Sürünmesi Uyum Fonksiyonları	131
10.1.1.3 Sürünme Testlerinde Boltzmann Üstüste Ekleme Prensibi	135
10.1.1.3.1 Ayrık Biçim	135
10.1.1.3.2 Sürekli Biçim	138
10.1.1.4 Sürünme Testlerinde Hafıza Etkileri	139
10.1.1.5 Relaksasyon Testlerinde Boltzmann Üstüste Ekleme Prensibi	141
10.1.1.5.1 Ayrık Biçim	141
10.1.1.5.2 Sürekli Biçim	142
10.1.1.6 Relaksasyon Testlerinde Hafıza Etkileri	143
10.1.1.7 Geçiş Relaksasyon Modülleri ve Geçiş Uyum Fonksiyonları	145
10.1.1.8 Önemli Eşitsizlikler	146
10.1.1.9 Üstüste Ekleme Prensibinin Genelleştirilmesi	147
10.1.1.10 Viskoelastik Fonksiyonlar Arasındaki Bağlılıklar	148
10.1.1.11 Frekansa Bağlı, Genelleştirilmiş Gerilme-Gerinim İlişkileri	152
10.1.1.12 Herhangi Bir Simetri Derecesi İçin Genelleştirilmiş Bağlılıklar	153
10.1.1.12 Sayısal Örnekler	154

10.1.2 Dinamik Viskoelastisite Kuramsal Altyapı	163
10.1.2.1 Relaksasyon Modülü, Frekans ve Zaman Boyutu	166
10.1.2.2 Kompleks Viskoelastisite	166
10.1.2.3 Dinamik Relaksasyon Testlerinde Disipasyon Enerjisi	167
10.1.2.4 Dinamik Sürünme Uyum Fonksiyonu	168
10.1.2.5 Uyum Fonksiyonu, Frekans ve Zaman Boyutu	169
10.1.2.6 Dinamik Sürünme Testlerinde Disipasyon Fonksiyonu	171
10.1.2.7 Düşük Frekanslarda Kompleks Sürünme Uyum Fonksiyonu	172
10.1.2.8 Düşük Frekanslarda Kompleks Relaksasyon Modülü	172
10.1.2.9 Denge Durumu Viskozitesi ve Durağan Konum Uyum Fonksiyon	172
10.1.2.10 Krönig-Kramers Bağlantıları	174
10.1.2.11 Yığılma Sürünme Uyum Fonksiyonunun Elde Edilmesi	175
10.2 Deneysel Relaksasyon Cevabının MARC Malzeme Modeline Aktarılması	177
11. Seçilen Malzeme Modeline Süreksiz Hasar Özelliğinin Eklenmesi	178
12 Seçilen Malzemeye Süreğen Hasar Özelliğinin Kazandırılması	181
13. Seçilen Malzeme Modeliyle 3 Gerilme Durumuna Ait Sonuçlar	185
13.1. Tek Elemanlı Model ve Çözümleme ve Test Sonuçlarının Kıyası	186
13.1.1 Tek Elemanlı Tek Eksenli Çekme	186
13.1.2 Tek Elemanlı İki Eksenli Çekme	187
13.1.3 Tek Elemanlı Düzlem Kayması	189
14. Basma ve Çekme Gerilmelerindeki Olası Farklılık	190
14.1 Sürtünmesiz Disk Basma Testi	190
14.1.1 Sürtünmesiz Disk Basma Testi Marc Analizi	192
15. Ogden Malzeme Modeli ve Yığılma Modülü	196
15.1 Yığılma Modülü Testi	197
16. Laboratuvar Denekleri Testleri	199

16.1.Laboratuvar Denekleri Statik Testleri	199
16.1.1 Üç Gerilme Durumu, Gerçek Test Düzeneğinin Modellemesi	199
16.1.1.1 Gerçek Deney Modeli Tek Eksenli Çekme	200
16.1.1.2 Gerçek Deney Modeli İki Eksenli Çekme	201
16.1.1.3 Gerçek Deney Modeli Düzlem Kayma	202
16.2. Dinamik Laboratuvar Denek Testleri ve Kuramsal Altyapısı	203
16.2.1 Dinamik Kuramsal Altyapı	203
16.2.2 Kauçuk Disk Dinamik Testi	219
16.2.2.1 Malzeme Özelliğinin Tanıtılması	220
16.2.2.2 Analizin Gerçekleştirilmesi	223
17. Motor Takoza Testleri	225
17.1. Motor Takoza Statik Testleri	225
17.1.1. Motor Takoza Çözümleme ve Test Sonuçlarının Kıyası	225
17.1.1.1 Test:10mm/dk, 3 çevrim, ± 1 mm	226
17.1.1.2. Test:10mm/dk, 3 çevrim, 0-10mm’lik	228
17.2. Motor Takoza Dinamik Testleri	229
17.2.1 1-50Hz’lik ± 0.2 mm genlikteki tarama	230
17.2.2 40-400Hz’lik ± 0.05 mm genlikteki tarama	230

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1 E, G, K, ν arasındaki bağıntılar	39
Tablo 2 J, D, B, ν arasındaki bağıntılar	44
Tablo 3 Tek Bir Gerilme Durumu İçin Eğri Çakıştırma Performansı	114
Tablo 4 Üç Temel Gerilme Durumu İçin Eğri Çakıştırma Performansı	121

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 2.1 Motor takozlarının araç montaj konumları	3
Şekil 2.2 Kauçuktaki gerilme, zaman ve yükleme çevrim sayısı ile ilişkisi	8
Şekil 2.3 Kauçuğun karakteristik histerisis eğrisi.	9
Şekil 2.4 Hızın artması histerisis alanının arasındaki ters orantı.	10
Şekil 2.5 Kauçuk artan genlikli ardışık yüklemeleri	12
Şekil 3.1 Bir cisme etkiyen gerilme	13
Şekil 3.2 Gerilme tetrahedronu	14
Şekil 3.3 Elastik cismin biçim beğıştirmesi	15
Şekil 3.4 Kayma kuvvetleri	18
Şekil 3.5 Tek simetri düzlemi	23
Şekil 3.6 Tek simetri düzlemi ve eksen	26
Şekil 3.7 K ve K' koordinat sistemleri ve ortonormal bazları	33
Şekil 3.8 Yer değıştirme vektörünün silindirik koordinatlarda gösterimi	45
Şekil 3.9 Silindirik cisimde gerilme durumları	47
Şekil 3.10 Silindirik koordinatlar, r eksen için denge denklemi	47
Şekil 3.11 Silindirik koordinatlar, θ eksen için denge denklemi	49
Şekil 3.12 Silindirik koordinatlar, z eksen için denge denklemi	51
Şekil 3.13 V hacmi, dS_i birim yüzeyi ve yüzey normal birim vektörü n_i	53
Şekil 3.14. Kısmi hacim, dS_i yüzeyi ve C hattı	54
Şekil 3.15 V hacmi, ΔV birim hacmi, üzerindeki P noktası	55
Şekil 3.16 S* tarafından kesilen süregelen hacim V	56

Şekil 3.17 \mathbf{P} noktasına etkiyen moment $\Delta \mathbf{M}_i$	56
Şekil 3.18 Bileşke gerilme vektörü, birim vektörlerle gösterimi	58
Şekil 3.19 Cauchy Gerilmesi için gerilme tetrahedronu	58
Şekil 3.20 Gerilme Tensörü bileşenleri	59
Şekil 3.21 Yer değiştiren P noktası ve cisimdeki diğer bir nokta Q	60
Şekil 3. 22 Belirtilen kuvvetlerin etkisinde hareket halindeki cisim	66
Şekil 3.23 Referans konumu ve sonrasında $d\mathbf{S}$ yüzeyi	69
Şekil 3.24 Polimer zincirinin doğru parçaları çakıştırma yoluyla temsili	71
Şekil 3.25 Polimer zincirinin vektörel temsili	72
Şekil 3.26.Uçtan uca uzaklık, \mathbf{r} bileşke vektör ve polimer zinciri	73
Şekil 3.27 (a) ve (b) Vektör grubunun temsil ettiği polimer zinciri	73
Şekil 3.28 Uçtan uca uzaklık ve olasılık fonksiyonu $P(x)$	74
Şekil 3.29. \mathbf{r} vektörünün oluşturduğu r yarıçaplı küre	75
Şekil 3.30. Polietilen , çapraz bağ oluşumu öncesi ve sonrası	76
Şekil 3.31 Doğal kauçuk, çapraz bağ oluşum öncesi (a) ve sonrası (b)	76
Şekil 3.32 Elastomer ağından ayrılıp ucu orijine ötelenmiş polimer zinciri	76
Şekil 3.33 Cismin her 3 eksenindeki yer değiştirme oranları	78
Şekil 3.34 Makroyapıdaki toplam oranının x,y ve z bileşenleri	79
Şekil 3.35 Tek eksenli gerilme , z yönünde uygulanan \mathbf{f} yükü	81
Şekil 3.36. Mühendislik Gerinimi /Mühendislik Gerilmesi	83
Şekil 3.37 Komşu iki noktadan \mathbf{p} 'nin hızı \mathbf{v}_i ve \mathbf{q} 'nun $\mathbf{v}_i + d\mathbf{v}_i$	86
Şekil 3.38 Kauçuğun Maxwell Moedilyle Temsili	92
Şekil 3.39 Kauçuğun Kelvin-Voigt Moedilyle Temsili	92
Şekil 3.40 Kauçuğun Zeener Moedilyle Temsili	93
Şekil 4.1. Aynı hamur , farklı pişme yöntemleri, mekanik davranışları	94
Şekil 5.1. Tek eksenli çekme testi için papyon denek ölçüleri.	96
Şekil 5.2. Düzlemsel Kaymalı çekme test denek boyutları oranı.	96
Şekil 6.1. Tek eksenli çekme düzenekleri kıyası	97
Şekil 6.2 Düzlemsel Kaymalı çekme düzenekleri kıyası	97
Şekil 6.3. İki eksenli çekme düzenekleri kıyası	98

Şekil 6.4 %10 Gerinimdeki Tek Eksenli Çekme Test Sonuçları	99
Şekil 6.5 %20 Gerinimdeki Tek Eksenli Çekme Test Sonuçları	99
Şekil 6.6 %30 Gerinimdeki Tek Eksenli Çekme Test Sonuçları	100
Şekil 6.7 %40 Gerinimdeki Tek Eksenli Çekme Test Sonuçları	100
Şekil 6.8 %50 Gerinimdeki Tek Eksenli Çekme Test Sonuçları	101
Şekil 6.9 %10 Gerinimdeki İki Eksenli Çekme Test Sonuçları	101
Şekil 6.10 %20 Gerinimdeki İki Eksenli Çekme Test Sonuçları	102
Şekil 6.11 %30 Gerinimdeki İki Eksenli Çekme Test Sonuçları	102
Şekil 6.12 %40 Gerinimdeki İki Eksenli Çekme Test Sonuçları	103
Şekil 6.13 %50 Gerinimdeki İki Eksenli Çekme Test Sonuçları	103
Şekil 6.14 %10 Gerinimdeki Düzlem Kayma Gerilmesi Test Sonuçları	104
Şekil 6.15 %20 Gerinimdeki Düzlem Kayma Gerilmesi Test Sonuçları	104
Şekil 6.16 %30 Gerinimdeki Düzlem Kayma Gerilmesi Test Sonuçları	105
Şekil 6.17 %40 Gerinimdeki Düzlem Kayma Gerilmesi Test Sonuçları	105
Şekil 6.18 %50 Gerinimdeki Düzlem Kayma Gerilmesi Test Sonuçları	106
Şekil 7.1 Deneysel sonuç ve matematiksel eğri	107
Şekil 7.2 Sabit hız ve gerinimde kaydedilen mekanik özellikler	108
Şekil 7.3 Ham deneysel sonuçları ve sıfıra ötelenmiş halleri	109
Şekil 8.1 Tek eksenli gerilme	110
Şekil 8.2 Farklı malzeme modellerinin kıyası	113
Şekil 8.3 İki eksenli gerilme	114
Şekil 8.4 Düzlemsel Kayma	117
Şekil 8.5 Matlab Program Satırları	122
Şekil 8.6 Matlab çıktı grafiği	123
Şekil 8.7 %20 gerinimi için Signiorini eşitliklerine ait eğriler.	124
Şekil 9.1 Nihai malzeme modeli olarak seçilen Ogden 2	125
Şekil 9.2 Üç temel gerilme durumu deneysel Ogden 2	126
Şekil.10.1 İdeal Relaksasyon davranışı	128
Şekil.10.2 İdeal Sürünme davranışı	128
Şekil 10.3 Gerçek Relaksasyon davranışı.	128

Şekil 10.4 Gerçek Sürünme davranışı	129
Şekil 10.5 Sonsuz küçük gerinimlerde kayma relaksasyonu	129
Şekil 10.6 Logaritmik eksenlerde relaksasyon modülü $G(t)$	130
Şekil 10.7 Doğrusal bölgeden, doğrusal olmayan bölgeye geçiş	131
Şekil 10.8 Basamak fonksiyonu olarak σ_1 ve σ_2 ve kaydedilen gerinimler	132
Şekil 10.9 $\varepsilon(t_a)$ ve $\varepsilon(t_b)$ 'in artan tahrik gerinimi boyunca değişimleri	133
Şekil 10.10 sürünme uyum fonksiyonunun zamana bağlı değişimi.	133
Şekil 10.11.a Doğrusal bölgede birim yerdeğiştirmelerin süperpozisyonu	136
Şekil 10.11.b $t=\theta$ anında kayma gerilmesinin devre dışı kalışı	137
Şekil 10.12 Türevi $\theta_1 < t < \theta_2$ süreksiz gerilme fonksiyonu	138
Şekil 10.13 $\psi(t)$, $\psi(t-\theta)$ ve $d\psi(t-\theta)/d(t-\theta)$ nin t 'ye bağlı değişimleri	140
Şekil 10.14 $dJ(t-\theta)/d(t-\theta)$ rejimi ve rastgele gerilme tatbiki kaydı $\sigma(\theta)$	141
Şekil 10.15 Türevi $\theta_1 < t < \theta_2$ süreksiz gerinim fonksiyonu	142
Şekil 10.16 $\Phi(t)$, $\Phi(t-\theta)$ ve $d\Phi(t-\theta)/d(t-\theta)$ nin t 'ye bağlı değişimleri	144
Şekil 10.17 $dG(t-\theta)/d(t-\theta)$ rejimi ve rastgele gerinim tatbiki kaydı $\varepsilon(\theta)$	144
Şekil 10.18 10.1.1.12 Örnek-2	156
Şekil 10.19 10.1.1.12 Örnek-4	157
Şekil 10.20.a 10.1.1.12 Örnek-5	158
Şekil 10.20.b 10.1.1.12 Örnek-6	160
Şekil 10.21 Sinüzoidal yer değiştirme tahriki δ kayıp açısı	164
Şekil 10.22 $G^*(\omega)$ ve $J(\omega)$	165
Şekil 10.23. Relaksasyon Deneyel Verisine Çakıştırılan MARC Eğrisi	178
Şekil 11.1 Süreksiz hasar davranışı temsili gösterim	179
Şekil 11.2 Süreksiz hasar davranışı deneysel	179
Şekil 11.3.a Süreksiz hasar formülasyonunun grafik gösterimi	10
Şekil 11.3.b Formülasyon sonucu deneysel süreksiz hasar ve MARC eğrisi	181
Şekil 12.1 Süreğin hasar davranışı temsili gösterim	182
Şekil 12.3 Süreğin hasar davranışı deneysel veri-ilk 20 çevrim	182
Şekil 12.4 Süreğin hasar -çevrim sayısı-maks. gerilme değeri eğrisi grafiği	183

Şekil 12.5.a Şekil 12.4'deki grafiğe MARC'ın çakıştırdığı eğri.	184
Şekil 12.5.b Süreğin ve süreksiz hasar davranışı skaler faktör kıyaslaması	185
Şekil 13.1 Tek elemanlı, tek eksenli çekme analizi	186
Şekil 13.2 Tek elemanlı tek eksenli çekme analiz sonucu grafik gösterim	187
Şekil 13.3 Tek elemanlı, iki eksenli çekme analizi	188
Şekil 13.4 Tek elemanlı iki eksenli çekme analiz sonucu grafik gösterim	188
Şekil 13.5 Tek elemanlı düzlem kayma analizi	189
Şekil 13.6 Tek elemanlı düzlem kayma analiz sonucu, grafik gösterim	189
Şekil 14.1 Kullanılan sürtünmesiz disk basma deney düzeneği	191
Şekil 14.2 Önerilen sürtünmesiz disk basma deney düzeneği	191
Şekil 14.3 Sürtünmesiz disk basma deneyi	192
Şekil 14.4 Diskin modellenmesi ve analiz şartlarının girilmesi	193
Şekil 14.5 %10 gerinim-disk basma MARC analizi ve deneysel sonuç	194
Şekil 14.6 %20 gerinim-disk basma MARC analizi ve deneysel sonuç	194
Şekil 14.7 %30 gerinim-disk basma MARC analizi ve deneysel sonuç	195
Şekil 14.8 %40 gerinim-disk basma MARC analizi ve deneysel sonuç	195
Şekil 15.1 Yığılma modülü tayini test düzeneği	197
Şekil 15.2 Hacimsel sıkıştırma-deneysel sonuç	198
Şekil 16.1 Gerçek deney modeliyle tek eksenli çekme analizi	200
Şekil 16.2 Gerçek deney modeliyle tek eksenli çekme analiz sonucu	201
Şekil 16.3. Gerçek deney modeliyle iki eksenli çekme analizi	201
Şekil 16.4. Gerçek deney modeliyle iki eksenli çekme analiz sonucu	202
Şekil 16.5 Gerçek deney modeliyle düzlem kayma analizi	202
Şekil 16.6 Gerçek deney modeliyle düzlem kayma analiz sonucu	203
Şekil 16.7 Kütleli ve kütsüz Kelvin Voigt Modeli	203
Şekil 16.8 $\mathbf{F}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{F}_T(t)$ 'in gerçel ve sanal ekseninde gösterimleri	208
Şekil 16.9 A_1 , A_2 , histerisis alanları, δ_1 ve δ_2 kayıp açılarıyla ilişkisi	209
Şekil 16.10 Disk denek 10Hz'de ± 0.05 kN yük genliğinde dinamik test	211
Şekil 16.11 Orijine ötelenmiş histerisis	212
Şekil 16.12 10Hz ± 0.05 kN kuvvet tahrikli disk dinamik testi	214

Şekil 16.13 1-50Hz ± 0.05 kN disk dinamik testi, Frekans/ Kayıp Açısı	216
Şekil 16.14 10-400Hz ± 0.05 kN disk dinamik testi, Frekans/ Kayıp Açısı	217
Şekil 16.15 1-50Hz ± 0.05 kN disk dinamik testi, Frekans / C [kNs/mm]	218
Şekil 16.16 1-50Hz ± 0.05 kN disk dinamik testi, Frekans / C [kNs/mm]	218
Şekil 16.17 Disk dinamik test verilerinin MARC'a tanıtılması	221
Şekil 16.18 Tanıtılan malzeme modeline uydurulan eğri (1-50Hz)	222
Şekil 16.19 Disk analiz sonucu, deneysel veri kıyaslaması (1-50Hz)	223
Şekil 16.20 Disk analiz sonucu, deneysel veri kıyaslaması (10-400Hz)	224
Şekil 17.1 Schenck Statik-Dinamik test cihazına bağlı haldeki motor takozu	225
Şekil 17.2 Motor takozu, statik testin yazılım üzerindeki çözümlemesi	226
Şekil 17.3 En kritik zorlanma yaşayan kısım-büyütülmüş	227
Şekil 17.4. Deneysel sonuç ve çözümleme sonuçları, grafik gösterim	228
Şekil 17.5. Motor takozu, yüke doyurma testi analizi	228
Şekil 17.6. Deneysel sonuç ve çözümleme sonuçları , grafik gösterim	229
Şekil 17.7 Motor takozu 1-50Hz , deneysel veri-çözümleme sonucu	230
Şekil 17.8 Motor takozu 1-50Hz , deneysel veri- çözümleme sonucu	230

SEMBOL LİSTESİ

r	: Radius vektörü
F_0	: Tahrik kuvvet genliği
F_{T^0}	: Kaydedilen en yüksek kuvvet
f	: Frekans
f_0	: Okunan kuvvet genliği
ω	: Frekans [1/s] ; Açısal Hız [rad/s]
w	: Birim hacim başına enerji
W	: Gerinim enerjisi fonksiyonu
A, S	: Alan
n	: Yüzey birim normal vektörü
u_{stat}	: Statik yer değiştirme
u_{din}	: Dinamik yer değiştirme
$H(\omega)$: u_{din} / u_{stat}
∇	: Gradyan Operatörü
Δ	: Laplasyen Operatörü $\nabla \cdot \nabla$
Δ	: Hacim değişimi oranı
$H(t)$: Basamak fonksiyonu
t	: Zaman
θ	: Zaman
θ	: Faz Açısı
δ	: Kayıp Açısı
δ	: Kroenecker Deltası
η	: Viskozite
η_L	: Uzunlamasına viskozite
p	: Hidrostatik stress
$P(x)$: Olasılık fonksiyonu
t	: Tasarım alanı sınırına uygulanan kuvvet
ν	: Poisson oranı
μ_n	: Ogden Modül Katsayıları
α_n	: Ogden Üstel Katsayıları
a_{ij}	: Doğrultman kosinüsleri
λ	: Lamé katsayısı

λ	: Germe oranı
$\epsilon_{i,j,k}$: Dönel permütasyon çarpanı
ϵ	: Birim yer değiştirme, birim uzama, mühendislik gerinimi
σ	: Gerilme
C_{ij}	: Modül Tensörü Bileşenleri
C_1, C_2	: Mooney Katsayıları
C_{10}, C_{01}	: Mooney –Rivlin Katsayıları
C_{20}, C_{30}	: Signiorini ve Yeoh Katsayıları
C	: Sönüm Katysayısı
K	: Yay katsayısı
K	: Yığılma modülü
B	: Yığılma Uyumu
G	: Kayma Modülü (Viskozite başlığı altında aynı zamanda relaksasyon modülü)
J	: Kayma Uyumu (Viskozite başlığı altında aynı zamanda sürünme uyumu)
E	: Elastisite Modülü
D	: Çekme Uyumu
$K(t), K(\omega)$: Yığılma modülü fonksiyonu
K^*	: Kompleks yığılma modülü
K'	: Kompleks yığılma modülü gerçel bileşeni
K''	: Kompleks yığılma modülü sanal bileşeni
$B(t), B(\omega)$: Yığılma uyumfonksiyonu
B^*	: Kompleks yığılma uyumu
B'	: Kompleks yığılma uyumu gerçel bileşeni
B''	: Kompleks yığılma uyumu sanal bileşeni
$G(t), G(\omega)$: Kayma, relaksasyon modülü fonksiyonu
G^*	: Kompleks Kayma , relaksasyon modülü
G'	: Kompleks Kayma , relaksasyon modülü gerçel bileşeni
G''	: Kompleks Kayma , relaksasyon modülü sanal bileşeni
$J(t), J(\omega)$: Kayma , Sürünme uyum fonksiyonu
J^*	: Kompleks Kayma , Sürünme uyumu
J'	: Kompleks Kayma, Sürünme uyumu gerçel bileşeni
J''	: Kompleks Kayma , Sürünme uyumu sanal bileşeni
$E(t), E(\omega)$: Çekme modülü fonksiyonu
E^*	: Çekme modülü
E'	: Kompleks Çekme modülü gerçel bileşeni

E''	: Kompleks Çekme modülü sanal bileşeni
$D(t), D(\omega)$: Çekme uyum fonksiyonu
D^*	: Çekme uyumu
D'	: Kompleks Çekme uyumu gerçel bileşeni
D''	: Kompleks Çekme uyumu sanal bileşeni
$\Phi(t)$: Relaksasyon hafıza fonksiyonu
$\psi(t)$: Sürünme hafıza fonksiyonu

EK LİSTESİ

EK A	Deneyisel Verilere MARC tarafından çakıştırılmış eğrilerin kontrol parametreleri ve çakışma hataları
------	--

234

ÖZET

Kauçuk konstrüksüyon geliştirmede en büyük problem, kauçuğun doğrusal olmayan, zamana ve yük tekrar sayısına, pişme yöntem ve değişkenlerine bağlı mekanik özelliklerine ampirik ve analitik olarak hakim olmanın güçlüğüdür, özellikle de ortada kesinleşmiş bir konstrüksüyon yokken. Bu çalışmada bitmiş konstrüksüyona ihtiyaç duyulmaksızın, sabit kalınlıktaki arıplakalardan standart ölçülerde kesilmiş denekler üzerinde yapılan mekanik test sonuçlarının, sonlu elemanlar yazılımına girilmesi, ve yazılımda bir defa doğru malzeme modeli elde edildikten sonra, bu malzemenin atandığı karmaşık konstrüksüyonların çeşitlilik arz eden testlerinde dahi, sanal ortamda tasarlananla, bu doğrultuda imal edilen bitmiş parçanın test sonuçlarının çakışacağını göstermektir. Böylelikle , istenen mekanik davranış çerçevesindeki nihai konstrüksüyon yazılım üzerinde oluşturulup, bitmiş parça için prototip kalıp bir defa üretilmiş olur

Anahtar Kelimeler:Olmayan Elastisite, Histerisis, Vizkoelastiklik, Rijitlik Kaybı, Pişme Koşull

SUMMARY

The most difficult problem in developing a rubber construction is the difficulty of empirical and analytic control over the non-linear and time dependent mechanical behaviour of the rubber being highly effected by the number of repetitive loading cycles , as well as by the type and parameters of curing. Particularly if there isn't any certain completed construction in use. In this work , it's aimed to show , that final-construction-independant rubber material properties for an FEA software can be obtained , using the experimental results of simple lab-slabs only. And once the appropriate material model is acquired, it's quite possible to obtain successfully coinciding load-displacement curves for the final shape of the real part and its corresponding FEM model , even for different sorts of mechanical tests of varying complexity. Hence the final construction shape of the part can be completed thoroughly on a software platform, within any mechanical limitations requested by the client, asiding the necessity of manufacturing several moulds for provisional trial constructions before reaching the appropriate final one.

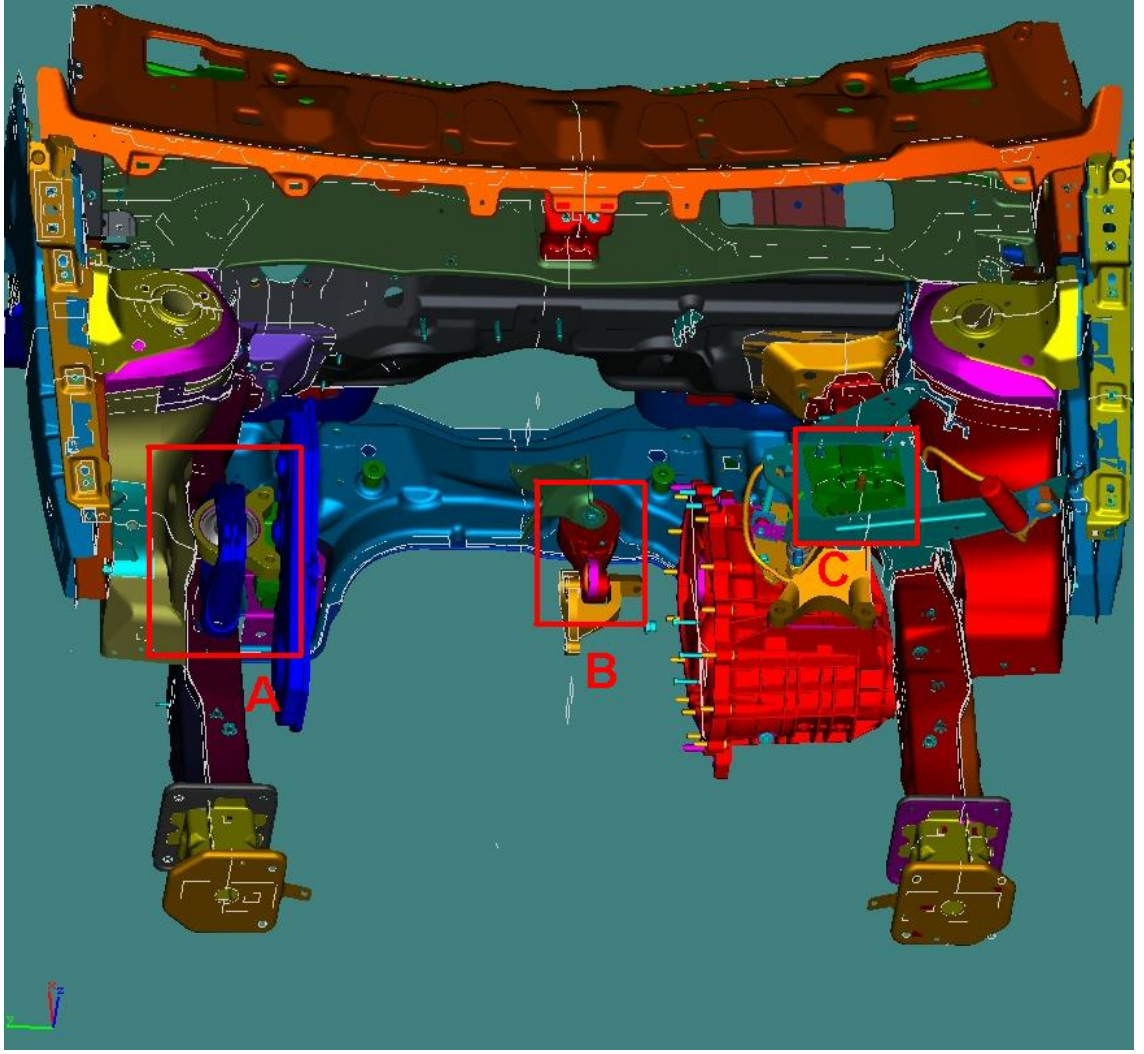
Keywords: Non-linear Elasticity, Hysterisis, Viscoelasticity, Loss of Stiffness, Curing Parameters.

1.GİRİŞ

Kauçuk konstrüksüyon geliştirmede en büyük problem, ortada henüz kesinleşmiş bir konstrüksüyon yokken,kauçuğun doğrusal olmayan, zamana ve yük tekrar sayısına, pişme yöntem ve değişkenlerine bağlı mekanik özelliklerine ampirik ve analitik olarak hakim olmanın güçlüğüdür. sabit kalınlıktaki plakalardan standart ölçülerde kesilmiş denekler üzerinde yapılan mekanik test sonuçlarının, sonlu elemanlar yazılımına girilmesi, ve yazılımda malzeme modeli elde edildikten sonra, bu malzemenin atandığı karmaşık konstrüksüyonların çeşitlilik arz eden testlerinde dahi, sanal ortamda tasarlananla, bu doğrultuda imal edilen bitmiş parçanın test sonuçlarının çakışması hedeflenmiştir. Böylelikle , istenen mekanik davranış çerçevesindeki nihai konstrüksüyon yazılım üzerinde oluşturulup, bitmiş parça için prototip kalıp bir defa üretilmiş olur. Bunun için öncelikle hamurdan yola çıkılarak test plakaları basılır , bu test plakalarında kesilecek deneklerle üç temel şekil değiştirme durumunu sınavan tek eksenli, iki eksenli ve düzlemsel kayma çekme testleri yapılır. Test sonuçları sonlu elemanlar çözümleme yazılımına aktarılır. Bu üç temel test çeşidi için ,testin tek elemanlı temsiline ve gerçek denek konstrüksiyonunun modellendiği programlar oluşturulup testler yazılım üzerinde yaptırılır. Edinilen sonuçlar plaka numunelerinin test sonuçlarıyla kıyaslanır. Mevcut malzeme eğrisi oluşturma yaklaşımları içinde, bu üç test çeşidi için de ortak en tatminkar çakışmayı veren model malzeme modeli olarak atanır. Bitmiş parça için düşünülen konstrüksüyonlar modellenir , her bir konstrüksüyon için atanmış malzeme modeliyle öngörülen mekanik testler yazılım üzerinde gerçekleştirilir. İhtiyaç duyulan konstrüksüyonel iyileştirmeler, sonlu elemanlar modeline uygulanır ve atanmış bulunan malzeme modeliyle erişilen en iyi konstrüksüyonun imali için prtototip kalıp yaptırılır. Yapılan prototip kalıpta, test plakaları için kullanılmış olan karışım , aynı pişirme yöntemi ve değişkenleriyle (en temel olarak pişme sıcaklığı ve süresi) kalıplanır. Ve uygun laboratuvar ortamında şartlandırılan parça , yazılımda bitmiş parça için öngörülüp hesaplamaları yapılmış tüm testlerin gerçeğine tâbi tutulur. Bitmiş parçaya ait gerçek test sonuçları, sonlu elemanlar modeliyle hesaplanan yazılım üzerindeki test sonuçlarıyla kıyaslanır.

2. Taşıt Motoru

Belirli kütlelere sahip hareketli iç aksamalarının, ağırlık merkezleri kaçınılmaz olarak dönme ekseninden kaçık bir biçimde dönme hareketi yaptıkları tahrik unsurları olan taşıt motorları, bu yolla yaydığı sinüzoidal titreşimlerden ötürü, rijit bağlantı elemanlarıyla doğrudan aracın şasisine bağlanamamaktadırlar. Dolayısıyla bağlantı elemanı olarak, biri şasi, diğeri motora rijit olarak monte edilen bağımsız iki metal parçayla, iki ucu bu iki metal parçaya kalıplama esnasında yapıştırılmış kauçuk gövdeden oluşan motor takozları kullanılır. Böylelikle seçilen bağlantı elemanı, belirli sınırlar dahilinde, altı serbestlik derecesine sahip bir mafsal görevi görmesinin yanı sıra, motordan gelen titreşimleri de kauçuğun sönüm özelliği gereği emmiş olur. Motorun kaç yerden ve ne tip takozlarla şasiye oturtulacağı, motorun tipine, ağırlığına, konstrüksiyon ve tipi doğrultusunda ağırlığının göstereceği dağılıma göre belirlenir. Tez kapsamında incelenecek motor takozu, ilgili aracın sahip olduğu 3 motor takozundan bir tanesidir. Takozların ilki, aracın soldan direksiyonlu tipi için, motoru, sürücü tarafındaki şasi bağlantı yerinden asmakta (bkz. Şekil 2.1'deki C) ; ikincisi, motoru, orta kısmından şasiye sabitleyerek, marşa basıldığında, motorun gösterdiği dönme eğilimine karşı elastik bir burulma direnci gösterip, motorun uyguladığı bu momenti tartmakta (bkz. Şekil 2.1'deki B), sonuncusu olan inceleme kapsamındaki ilgili takoz ise, yine aracın soldan direksiyonlu tipi için, motorun yolcu tarafında kalan ayağını bağlamakta kullanılmaktadır. (bkz. Şekil 2.1'deki A).



Şekil 2.1 Motor takozlarının araç montaj konumları

Motoru şasiye bağlamakta kullanılan bu kauçuk gövdeli bağlantı elemanlarının davranışını çözümlmeye geçmeden önce, ilgili bağlantı elemanından beklenen görevleri, bunun için de motorun taşıta uyguladığı temel yükleme durumlarını ele almakta fayda vardır.

2.1. Taşıt Motoru ve Kauçuk Takozlara Uyguladığı Statik ve Yol Kaynaklı Dinamik Yüklemler:

Motoru şasiye bağlamakta, rijit bağlantı elemanları yerine, kauçuk gövdeli bağlantı elemanlarının (motor takozlarının) kullanılmasındaki temel nedenlerden bahsederken, takozun, belirli sınırlar dahilinde olmak kaydıyla, altı serbestlik derecesine sahip bir mafsalsal görevi görmesinden söz etmiştik. Buradaki belirli sınırlar dahilinde altı serbestlik derecesi şunu ifade etmektedir: Motor yaydığı mekanik

titreşimlerden ötürü, şasiye kauçuk gövdeli takozlarla bağlanabilmekte; ancak yalnızca titreşim emmekle kalmamakta, kauçuğun rijit olmayan malzeme özelliğinden ötürü, motor kütesinin uyguladığı statik ve dinamik yüklemeler karşısında, kaçınılmaz olarak belirli yer değıştirmeler kaydetmektedir (dinamik yüklemeyi açılmak gerekirse; hem motorun devri esnasında, belirli kütelere sahip iç aksamalarının aldığı konumlar, hem de aracın seyri esnasında motor kütesinin uyguladığı yol ve araç kaynaklı yer değıştirmeler.) Kauçuk gövdenin, motor kütesi karşısında, gerek çökme adı verilen bu yer çekimi yön ve doğrultusundaki yer değıştirmesi (motor statik yükü altında), gerekse bahsedilen dinamik yüklemelerden yol ve araç kaynaklı olanları karşısında kaydedeceği farklı doğrultu ve yöndeki yer değıştirmeler esnasında, motorun dış gövdesine ait rijit uzantılardan hiç birisi, kaporta altındaki başka hiçbir rijit aksama temas etmemelidir. Buradan yola çıkarak gerek yer çekimi yönünde izin verilebilecek en yüksek çökme (araç konumu için -z yönü), gerekse diğer sonsuz sayıdaki yön ve doğrultudaki izin verilebilecek en yüksek yer değıştirmelerin x, y ve z bileşenleri hesaplanıp, kauçuk takozun, motor kütesinin uygulayacağı bu yüklemeler karşısında ilgili x, y ve z doğrultularında, en fazla ne kadar yer değıştirmesine müsade edileceğı belirlenir. İşte bu ilgili üç yönde , öngörülen en yüksek yükleme [N] karşısında, kauçuk gövdenin en fazla ne kadarlık bir yer değıştirmede [mm] bulunması gerektiğı, kauçuk gövdenin bu yöndeki rijitliğı [N/mm] ile ifade edilir, ki kauçuk motor takozuna ait öngörölmüş bu üç yöndeki “statik test” adıyla adlandırılan (kuşkusuz zamana bağı olmasına rağmen nispeten düşük bir hızda uygulandığı için:10mm/dk-50mm/dk) testlerin sonlu elemanlar analizi, motor takozu geliştirmenin esaslarından en önde gelenini oluşturmaktadır. Çünkü titreşim sönümlleme amacı altında, motorun devri ve aracın seyri esnasında rijit aksamaların birbirlerine çarpmasına müsade edilemez, ve bu sebeptendir ki bahsi geçen yer değıştirme sınırlamaları, titreşim sönümünden daha önceliklidir.

2.2 Taşı Motoru ve Kauçuk Takozlara Uyguladığı Motor Devinimi Kaynaklı Dinamik Yüklemeler (Mekanik Titreşimler):

Daha önce de özet olarak değinildiğı üzere, motora ait hareketli iç aksamalar, kaçınılmaz olarak, ağırlık merkezleri dönme ekseninden kaçık bir biçimde dönme hareketi yaptıklarından, bu yolla yaydıkları sinüzoidal titreşimlerin kauçuk gövdeli bağlantı elemanlarıyla sönümlenmesi hedeflenir. Motorun devir skalası dahilinde,

takozlara uygulayacağı sinüzoidal titreşimlerin frekans aralığı belirlenir. Bu frekans aralığı, sadece motorun kadranda görülen en yüksek devrinin frekansa çevrilmesi çerçevesinde değil, aracı kadradaki en yüksek devrinde seyir ettirirken, motorda titreşim yayabilecek her nevi aksamın, saniye başına en yüksek devir katedenin devir sayısının alınıp, belirli bir emniyet katsayısıyla çarpılması yoluyla elde edilen bir aralıktır. Konu kapsamındaki motor takozu için bu 400Hz olarak saptanmıştır. Dolayısıyla kauçuk takozlarının rezonansa girip girmeyeceğine dair sına, harmonik analiz yöntemiyle yapılır. İlgili yükleme hassasiyeti ve frekans kapasitesine sahip bir dinamik test cihazına bağlanan takoz, ilk planda 1'den 50Hz'e kadar birer Hz'lik adımlarla artarak belirli bir yük ya da yer değiştirme genliğinde titreştirilir, ardından aynı işlem 10'dan 400Hz'e kadar 10'ar Hz'lik adımlarla tekrarlanır ve Hz başına düşen gerilme cevaplarını görüntüleyen eğride, uygulanmış frekans adımlarının herhangi birtanesindeki gerilme cevabının ani bir yükselme (rezonans) gösterip göstermediği sorgulanır. Daha sonra da ayrıntılarıyla açıklanacağı üzere, tez kapsamında, bilinen harmonik analiz yöntemiyle, takozun ilgili frekans aralığındaki adımlardan herhangi birinde rezonansa girip girmeyeceği değil, artan frekans doğrultusunda ,kauçuk gövdenin, aynı tahrik genliğinde (yük ya da yer değiştirme genliği), ancak değişen yükleme hızları karşısında (frekans arttıkça yükleme hızı da artmış olacağından) verdiği gerilme cevabının 1-400Hz için nasıl değiştiği incelenecektir.

2.3 Taşıt Motoru ve Kauçuk Takozlara Uyguladığı Sürekli Statik Yükleme

Bir önceki bölümün son cümlesinden de tahmin edilebileceği üzere, kauçuğun mekanik davranışı zamana bağlıdır. Örnekleme gerekirse, kauçuk bir gövdeye uygulanacak 2mm'lik bir çökmenin, 0.1 saniye (10Hz), 1 saniye ve 1 saatlik züre zarflarında tamamlanması hallerinde, her üç durum için de farklı “birim yerdeğiştirme-gerilme” eğrileri ve farklı “en yüksek gerilme” değerleri elde edilir. Bu kauçuğun daha sonra ayrıntılarıyla açıklanacak olan viskoelastik yapısından kaynaklanmaktadır. Başlık kapsamında, sürekli statik yükleme dendiğinde, statik konumdaki motor yükü karşısında ilgili motor takozunun göstereceği yer değiştirmenin hep aynı kalmayacağı anlaşılmalıdır, yani motorun ilk monte edildiği anda, ilgili motor takozu, örneğin 175kg'lık motor kütleinin uyguladığı yükleme karşısında, 2.5mm yer değiştirsiyse, 1 saat sonra bu değerin 2.65mm, 1 gün sonra 2.68mm, 1 hafta 2.70mm olduğu okunur. Sabit yük altında bekletilen kauçuğun yer

değiştirme cevabının, azalan bir ivmeyle artmasına karşılık gelen bu eğilime “Sürünme” davranışı adı verilir ve kaynağı bahsedildiği üzere kauçuğun viskoelastik yapısıdır. Aynı eğilimin bir başka ifade ediliş tarzı da, kauçuk gövdenin, tabii tutulduğu sabit yer değiştirme karşısında verdiği gerilme cevabının, azalan bir ivmeyle düşmesi anlamına gelen “Relaksasyon” davranışdır ki her iki kavram da viskoelastisite kavramı içinde incelenecektir.

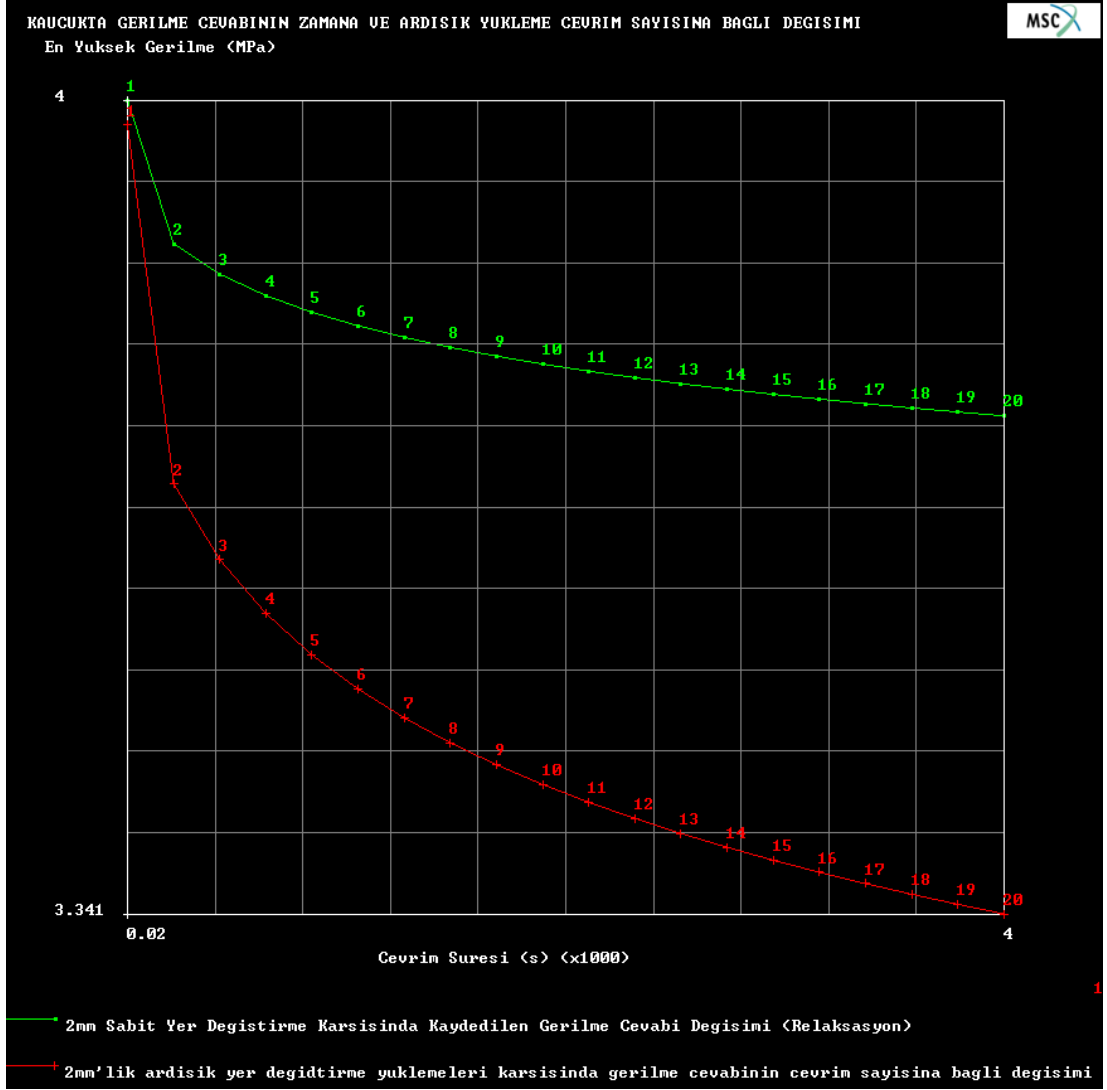
2.4 Taşıt Motoru ve Kauçuk Takozlara Uyguladığı Düşük ve Yüksek Frekanstaki Sürekli Dinamik Yüklemeler

Düşük ve yüksek dinamik yükleme için kauçuk motor takozunun tabii tutulduğu ilgili test yöntemlerinin farklı olmasından ötürü, bu ana başlığı düşük ve yüksek frekans için iki alt başlıkta incelemek yerinde olacaktır.

2.4.1 Taşıt Motoru ve Kauçuk Takozlara Uyguladığı Düşük Frekanstaki Sürekli Dinamik Yükleme (Hızlandırılmış Ömür Testi)

Kauçuğun mekanik davranışı ardışık yüklemelerin tekrar sayısına ve sıcaklığa bağlıdır. Ardışık yüklemelerin tekrarından kasıt, yükleme çevrimlerinin peşisıra gerçekleşmesi ve iki çevrim arasında bir duraksama gerçekleşmiyor olduğu kastedilmektedir. Bu bağlamda, daha sonra ayrıntılarıyla inceleneceği üzere, kauçuk gövde, aynı tahrik hızı ve yükleme genliğinde (örneğin bu durum için yüklemenin 2mm’lik çökme olduğunu kabul edelim) ,aynı hızda ve ardısıra gerçekleştirilen 2mm’lik çökme ve bırakmalarda kaydedilecek en yüksek gerilmelerin, ilk 2mm’lik çevrim için 4MPa ise, ikincisi için 3.8MPa, üçüncüsü için 3.76MPa, dördüncüsü için 3.74 MPa, beşincisi için 3.73 MPa, altıncısı için 3.727 MPa biçiminde ilerleyeceği görülecektir. Bu eğilimin bir kısmı relaksasyon kavramıyla da ilişkilendirilebilir, neticede ilk çevrimin en yüksek çökme değerine ulaşmak için harcanan zamanla, ikinci, üçüncü ve daha öte çevrimlerin en yüksek çökme değerlerine ulaşmak için harcanacak zaman arasında hep bir fark olacaktır ve kauçuğun da sabit yer değiştirme altında verdiği gerilme cevabı zamana bağlı olarak düşüş gösterdiğinden, kauçuk gövde, ilk 2mm’ye ulaşmak için harcayacağı zamanın ardından 4MPa’lık bir en yüksek gerilme değeri kaydederken, ikinci, üçüncü ve sonrası 2mm’lere ulaşmak için harcayacağı zaman dilimlerinin ardından, relaksasyonun etkisiyle, 4MPa’dan daha düşük ve aynı relaksasyon davranışında olduğu gibi, azalan ivmeyle düşen bir gerilme cevabı rejimi izleyeceği düşünülebilir. Bir düşüşün kaydedileceği ve bu

düşüşün relaksasyondaki gibi azalan ivmeli bir düşüş olacağı kesindir; ancak bu düşüşün yegane etkisi kauçuğun relaksasyon eğilimi değildir. Bunu daha açık bir biçimde ifade etmek üzere kıyaslamalı bir örnek olarak, özdeş iki kauçuk motor takozunun bir tanesi 20 saniyede 2mm'lik sabit bir yerdeğiştirmeye ulaştırılıp bu halde 8000 saniye bekletilsin ve her 40 saniyede bir veri toplanarak gerilme düşüşüne dair 200 veriden oluşan zamana bağlı bir değişim grafiği elde edilsin. Diğer takozsa, 0.1mm/s hızla 0->2mm gidiş, 2->0mm dönüş toplam 4mm yi 40 saniyede katedecek şekilde çevrimlere maruz kalsın ve 40 saniyede bir ulaşacağı en yüksek yer değiştirme olan 2mm'lik yol karşılığı verdiği gerilme cevapları , $8000/40=200$ çevrim boyunca kaydedilerek yine 8000 saniye boyunca sürecek olan, 40 saniyelik 20 çevrimin “çevrim sayısı” olarak işleneceği bir yatay eksen doğrultusunda, “en yüksek gerilmenin çevrim sayısına bağlı değişimi grafiği” çizilsin. Aşağıda yeralan Şekil 2.2’de, bahsedilen biçimde hazırlanmış iki grafik üstüste yatırılmış halde verilmiştir. Her iki takozun yüklemesine aynı t_0 anında başlandığı ve 2mm'lik en yüksek yer değiştirmeye aynı $t_1=20s$ anında ulaşmış, bu t_1 anını takiben her iki grafik için de aynı 40 saniyelik adımlarda, ve tamamen aynı $t_2=60s$, $t_3=100s$, $t_4=140s$ ve $t_{200}=8000s$ anlarında veri toplanmış bulunmaktadır. Bu bağlamda $t_1=20s$ anında her iki grafiğin de aynı kabul edilebilecek kadar yakın gerilme değerini göstermiş olmasına karşın, ikinci grafiğin takip eden 40’ar saniyelik adımlarda, birincinin aynı 40’ar saniyelik adımlarındakine kıyasla daha düşük gerilme cevapları sergilemiş olması, relaksasyon eğiliminin haricinde, ardışık çevrimlerin tekrar sayısına bağlı bir gerilme düşüş rejiminin, kauçuğun değinilmesi gereken ayrı bir özelliği olduğuna işaretir.

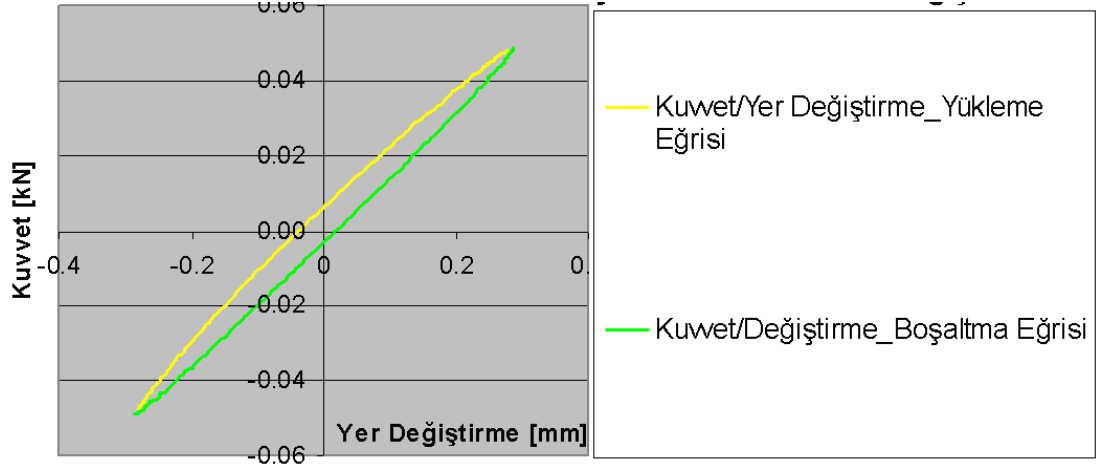


Şekil 2.2 Kauçuktaki gerilme cevabının zamana ve ardışık yükleme çevrim sayısına bağlı değişiminin kıyaslamalı olarak gösterimi.

Kauçuktaki gerilme cevabının zamana ve ardışık yükleme çevrim sayısına bağlı değişiminin laboratuvar ortamında sorgulandığı teste hızlandırılmış ömür testi adı verilir. Bu testin çevrim hızı ve sayısı belirlenirken, motor takozunu için öngörülen çalışma ömrü, aracın kaçınıcı kilometresinde olacaksa, ilgili kilometredeki araç seyrinin, belirli bir hesap sonucunda, daha kısa bir zaman diliminde takozu yaşatılması fikri odak alınır. Örneğin takozun 40000km önce değiştirilmemesi öngörülmüşse, bu 40000km'lik çalışma ömrü boyunca takozun maruz kalacağı düşünülen yükleme genlikleri, her bir genlik için (genelde birden fazla tayin edilir) ilgili yüklemenin hangi hızda gerçekleşeceği ve bu 40000km'lik seyir süresince kaç çevrimlik yüklemeye maruz kalacağı hesap edilir; aynı takoz, aynı araçtaki gerçek

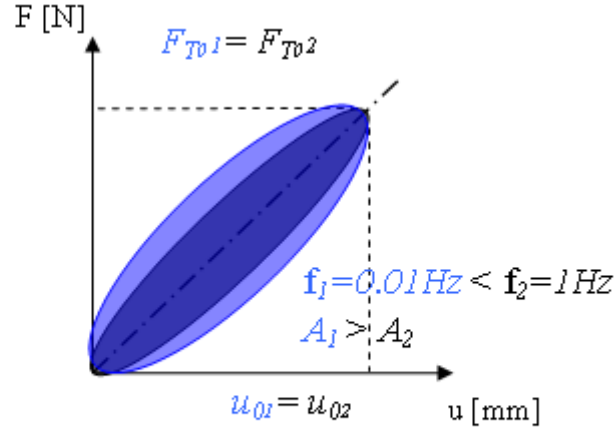
Çalışma mr süresince $\pm 8000\text{N}$ için toplam 6,000,000 çevrim, $\pm 1500\text{N}$ için toplam 14,000,000 çevrim ve $\pm 6000\text{N}$ için toplam 9,000,000 çevrim gibi, sonra bu ilgili çevrim sayılarının laboratuvar ortamında hızlandırılmış biçimde uygulanacağı çevrim frekansları belirlenir. Bunun tayini için parçaya yüklenen toplam enerjinin en az aynı kalması hedeflenir.

Bu konudaki örneklerle devam etmeden önce kauçuğun en önemli mekanik davranış özelliklerinden biri olan histerisis davranışına değinmekte fayda vardır, histerisis davranışı, aşağıdaki şekil 2.3’de de görülebileceği gibi, yer değiştirme/kuvvet grafiğinde, yükleme ve boşaltma eğrilerinin birbiriyle çakışık olmaması, arada belirgin bir alanın kalması durumudur.



şekil 2.3 Kauçuğun karakteristik histerisis eğrisi.

Arada kalan bu alan, parçaya yüklenen enerji, bir başka deyişle parça üzerinde ısıya dönüşen iştir. Ömür testlerinin laboratuvar ortamındaki hızlandırılmış çevrimlerine ait frekansın tayininde, işte bu arada kalan alanın araçtaki gerçek takoz ömrü boyunca, gerçek yükleme hızıyla gerçekleşecek 6,000,000 çevrim boyunca arada kalan alanlar toplamıyla, en az aynı olması hedeflenir, aynı 6,000,000 çevrim sayısı, 0.01Hz yerine hızlandırılmış olarak 1Hz’de uygulanmaz, yükleme hızı 0.01Hz’den 1Hz’e arttıķa, 0.01Hz gibi düşük hızlarda oldukça etkin olan relaksasyon rejimine 1Hz gibi yüksek hızlarda çok fazla fırsat tanınamaz hale geldiğinden, histerisis ve arada hapsedtiği alan daralır.



Şekil 2.4 Hızın artmasıyla histerisis alanının arasındaki ters orantı.

Ve 0.01 Hz’de 6,000,000 luk çevrim için arada kalan toplam alan $6,000,000A_1$ ise, 1Hz için, arada kalan alan A_2 ‘nin A_1 le olan ilişkisi hesaplanır, örneğin bu durum için, $A_1=2A_2$ olsun, o halde $6,000,000A_1=12,000,000A_2$ olacağından, laboratuvar ortamında en az 12,000,000 çevrim uygulanır ve bu öngörülen 1 Hz için 12,000,000 saniye demektir ki bu da 139 gün etmektedir. Geliştirici bu bağlamda test daha kısa sürsün, bunun içinde yeni alan hesabının öngöreceği çevrimde, çok daha kısa sürecek şekilde 20Hz’de gerçekleşsin diyemez, çünkü çok daha kısa sürede bitecek ve 20Hz için yapılacak yeni alan hesabına göre toplam alanların aynı olduğu bu testte, pistonun 20Hz’lik hızla en yüksek yer değiştirmeye çıkıp, durup ters yönde harekete başlaması esnasında hasıl olacak atalet kuvvetleri çok daha yüksek olacağından, 1Hz için istenilen ömür testini sağlayan parça 20Hz’de beklenmedik ölçüde daha kısa bir sürede kopmaya uğrayacaktır.

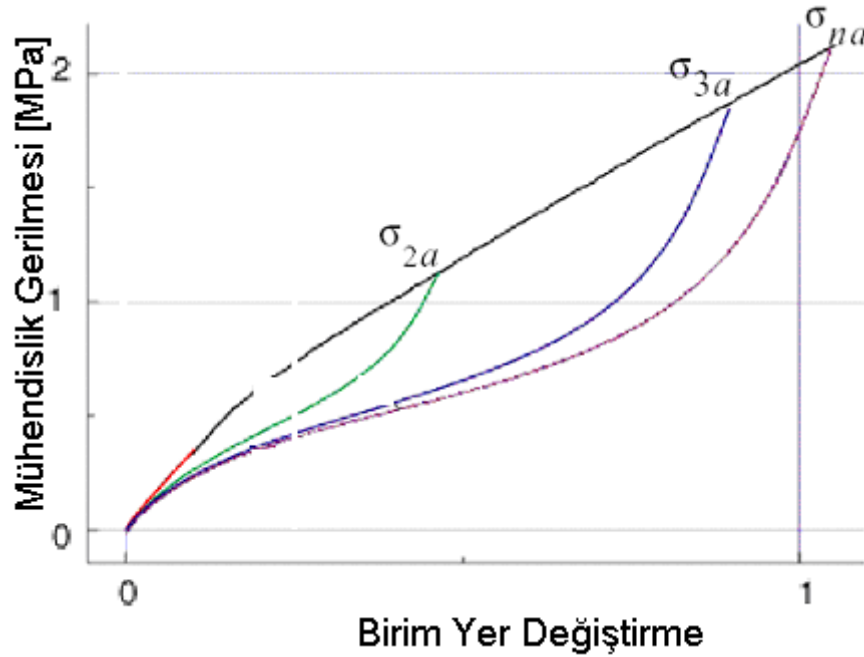
Diğer yandan, kauçuğun gerilme cevabı, yükleme zamanı ve ardışık yükleme çevrim sayısının yanı sıra, aynı zamanda sıcaklığa da bağlıdır. Burada bahsedilen sıcaklık, gerçek araçtakini temsilen, ısınan motordan yayılan ve taşıtın kullanıldığı iklime bağlı olarak değişen takozun içinde bulunduğu kaporta altı ortam sıcaklığı değil, hızlandırılmış ömür testi standart laboratuvar sıcaklığında yapıldığından dolayı, yukarıda değinilen bizzati histerisis içinde kalan alanla doğru orantılı olarak parça üzerinde ısıya dönüşen iş sonucu artan kauçuk sıcaklığıdır. Bir an için araçtaki gerçek takoz ömrü için öngörülen 0.01Hz’de 6,000,000 çevrimlik bir yüklemenin, motor ve kaporta altı ısınmalarını gözardı edebilmek adına, laboratuvar ortamında ve motor yerine test cihazıyla yapıldığını farzedelim. Bu durumda aynı ortam ve parça

sıcaklığında teste başlamış iki takozu, alan hesabı sonucu 0.01Hz’te ve 1Hz’te toplam çevrim sayıları gözönünde bulundurulduğunda, aynı toplam enerji aktarılıyor olsa da, hızlandırılmış ömür testinde, $A_1=2A_2$ ’den 0.5 kadar daha az ısı 100 katı daha kısa bir yüklendiğinden, diğer bir deyişle üzerindeki mevcut ısıyı atmaya 1/100 daha az zaman bulabileceğinden, parça birim zamanda 50 kat daha fazla ısınacaktır. Kauçuğun eş yük genliği ve hızdaki yüklemelere verdiği yer değiştirme cevabı, ileride ayrıntılarıyla açıklanacağı üzere, azalarak artan bir eğri teşkil ettiğinden, ısındıkça aynı $\pm 8000\text{N}$ altında daha çok yer değiştirecek, kesit alanı aynı $\pm 8000\text{N}$ altında daha düşük bir kesit alanı olmuş olacak ve aynı $\pm 8000\text{N}$ için kendisinden soğuk diğer parçaya kıyasla üzerinde daha yüksek gerilmeler hasıl olacağından, sıcak parça daha yüksek bir kopma riskine haiz olacaktır. İşte bu yüzden ki geliştirici firma, ya yaptığı ömür testi hesabı sonrası tayin ettiği bu yeni frekans ve çevrim sayısına ek olarak bu ısınma etmenine karşı, laboratuvar ortamında da olsa parçayı hava akımına tutmayı önerecek, ya da bu ısınma faktörünün öne çektiği kopma çevrimi sayısını gözönünde bulundurup, hızlandırılmış ömür testinden geçme şartı olarak atadığı çevrim sınır değerini düşürecektir. Her iki duruma ait testlerin de sonlu elemanlar programı olarak kullanılacak MARC’ta nasıl gerçekleştirileceğine dair ayrıntılar ileride etraflıca ele alınacağı gibi, bu iki durum için de kısa iki açıklama aşağıda verilmiştir.

Havalandırmanın öngörüldüğü durum için parça sıcaklığının laboratuvar ortamıyla aynı kaldığı kabul edilip, bu durumu temsil eden sonlu elemanlar çözümlemesi için MARC’a sadece kauçuğun gerilme cevabının zamana ve ardışık yükleme çevrim sayısına bağlı değişim eğrileri girilecek, parça sıcaklığının yükselmesini hesaba katan ikinci durum içinse, önceki iki eğriye ek olarak, kauçuğun gerilme cevabının sıcaklığa bağlı değişimi de MARC’a girilecek ve çözümleme yöntemi olarak ısıl-mekanik bağlı (coupled) denklemlerin kullanıldığı yöntem seçilecektir.

Hızlandırılmış ömür testlerinde, parçanın gerçek ömrünü temsil eden genliğin tayininde, genelde birden fazla yük genliğinin atandığına değinilmişti. Verilen $\pm 8000\text{N}$ için toplam 6,000,000 çevrim, $\pm 1500\text{N}$ için toplam 14,000,000 çevrim ve $\pm 6000\text{N}$ için toplam 9,000,000 çevrim örneği için konuşulacak olursa, ilgili yüklemeler, mevcut ömür testi yaklaşımları doğrultusunda, genellikle peşisıra 60 çevrimlik $\pm 8000\text{N}$ genlikteki, 140 çevrimlik $\pm 1500\text{N}$ genlikteki ve 90 çevrimlik

$\pm 6000\text{N}$ genlikteki yüklemelerinin oluşturduğu döngünün 100,000 kez tekrarlanması biçiminde uygulanır. Bu bağlamda $\pm 1500\text{N}$, $\pm 6000\text{N}$ ve $\pm 8000\text{N}$ genliğindeki yüklemeler birer çevrimlik ardışık sıra teşkil edecek biçimde yüklenmiyor olsa da, bir an için bu şekilde yüklendiğini farz ederek, aynı kauçuk gövdenin aynı şartlardaki (hız dahil) birer çevrimden $\pm 1500\text{N}$, $\pm 6000\text{N}$ ve $\pm 8000\text{N}$ 'lik bu ardışık yüklemelerinde, her genliğe ait histerisis eğrisinin diğerleriyle nasıl bir boyutsal ilişkide olacağını incelemek gerekmektedir. Bu ilişkinin tipik bir örneği aşağıda yer alan Şekil 2.5'te; ancak daha basit bir örnek üzerinde ifade etmek amacıyla, $+1500\text{N}/0$, $+6000\text{N}/0$ ve $+8000\text{N}/0$ 'lık yüklemeler olarak verilmiştir.



Şekil 2.5 Aynı kauçuk gövdenin aynı şartlarda birer çevrimden ardışık $+1500\text{N}/0$, $+6000\text{N}/0$ ve $+8000\text{N}/0$ 'lık yüklemelerine ait histerisis eğrileri

Şekil 2.5 incelendiğinde, ilgili yüklemelere ait histerisislerin yükleme eğrileri çakışırken, boşaltma eğrileri, bir üst gerilme değerine ait çevrimin boşaltma eğrisinin, alt gerilme değerlerine ait çevrimlerin boşaltma eğrilerinin altından geçecek biçimde kavis çizdiği görülecektir. Bu ilişki sonlu elemanlar çözümlemesinden elde edilecek histerisislerde de böyle olmalıdır, zira ancak bu şekilde arada kalan alan yoluyla ısıya dönüşen iş ve parça üzerinde yerattığı sıcaklık artışı, sonlu elemanlar yazılımı üzerinde simule ettirilecek hızlandırılmış ömür testinde de doğru temsil edilebilir.

2.4.2 Taşıt Motoru ve Kauçuk Takozlara Uyguladığı Yüksek Frekanstaki Sürekli Dinamik Yükleme (Dinamik Relaksasyon)

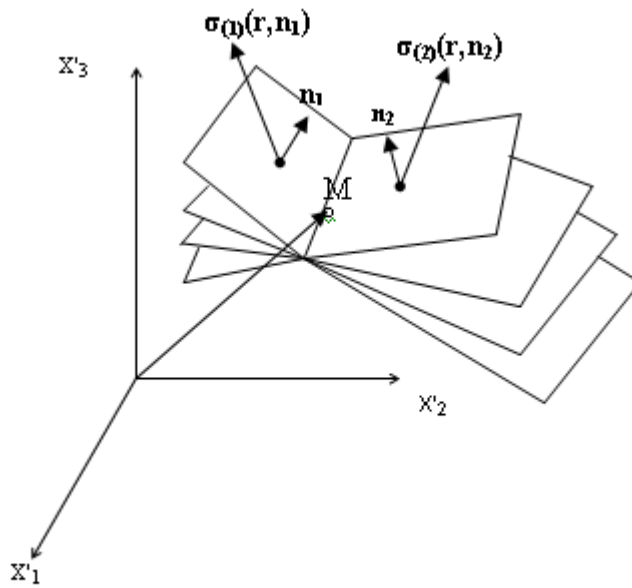
Yüksek frekanstaki sürekli dinamik zorlanmalarda ise, bir önceki bölümdeki davranış özelliklerinden relaksasyon eğilimi, uygulama hızlarının yüksekliğinden ötürü, nispeten daha geri planda kalırken, kauçuğun yaşadığı dinamik titreşimler karşısında daha düşük gerilme cevapları veren gevşek bir tutum gösterme eğilimi, diğer bir deyişle dinamik relaksasyon kavramı ön plana çıkmaktadır ki bu kavram ilerki bölümlerde ayrıntılarıyla açıklanacaktır.

3. Kauçuk Gövdeli Motor Takoza Statik Testlerine Dair Temel Kavramlar

3.1. Gerilme Tensörü:

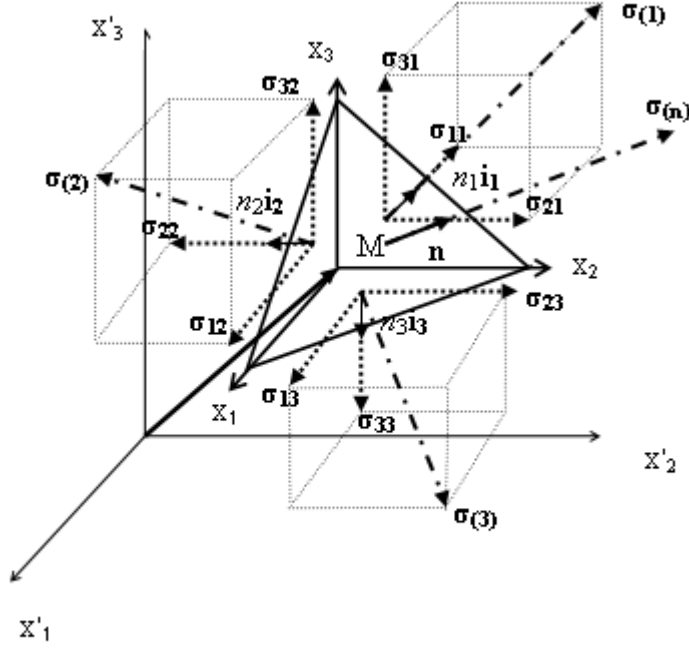
Gerilim ve biçim değiştirme kavramlarına girişte, gerilim ve biçim değiştirme tensörü, süreğin sistemlerin mekaniğinin sorgulanmasında temel kavramlar olduğundan, bu bölümde üzerinde özet olarak durulacaktır.

Gerilme bilindiği üzere, elastik bir cisim üzerindeki keyfi bir M noktasını üzerinde bulunduran ve alanı dA olan bir yüzeye etkiyen F kuvvetin oluşturduğu tensörel bir niceliktir.



Şekil 3.1 Bir cisme bir noktadan etkiyen kuvvetin oluşturduğu gerilme

Bu bağlamda $\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{n})$ tensörünü \mathbf{n} ve \mathbf{r} 'ye bağımlı halden, sadece \mathbf{n} 'ye bağımlı hale indirmek için , M noktasının ağırlık merkezinde yer aldığı bir tetrahedron çizelim.



Şekil 3.2 Gerilme tetrahedronu

Tetrahedronun ağırlık merkezinin ivmesi \mathbf{a} , birim kütleye etkiyen kuvvet \mathbf{f} [m/s^2] , tetrahedronun kütlesi dm , ilgili yüzey alaları dA_1, dA_2, dA_3, dA_n ve yüzey birim normal vektörleri $n_1\mathbf{i}_1, n_2\mathbf{i}_2, n_3\mathbf{i}_3, \mathbf{n}$ olmak üzere Newton'un 2. kanunundan

$$\mathbf{a}dm = \mathbf{f}dm + \sigma(\mathbf{n})^* dA_n - \sigma(1) dA_1 - \sigma(2) dA_2 - \sigma(3) dA_3 \quad (3.1)$$

Tetrahedronun M noktasına küçülmesiyle

$$\sigma(\mathbf{n}) dA_n = \sigma(1) dA_1 + \sigma(2) dA_2 + \sigma(3) dA_3 = \sum_{i=1}^3 \sigma(i) dA_i \quad (3.2)$$

$$dA_i = dA_n \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_i) = n_i dA_n \quad (3.3)$$

Birim normal vektörü \mathbf{n} olan yüzeye etkiyen gerilme

* Asıl gerilme kavramındaki $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ gösterimiyle karışmaması için notasyon , $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)$ olarak verilmiştir

$$\sigma_{(n)} = \sum_{i=1}^3 \sigma_{(i)} n_i \quad (3.4)$$

$\sigma_{(n)}$ 'i sitem eksenlerindeki bileşenleriyle gösterirsek

$$\sigma_{(n)k} = \sigma_{(i)k} n_i \quad (3.5)$$

$$\sigma_{nk} = \sigma_{ik} n_i \quad (3.6)$$

σ_{ni} ($i,k=1,2,3$) $i=k$ olduğu durumlar için 3 normal ve $i \neq k$ olduğu durumlar için 6 teğetsel etkiyen, toplam 9 gerilmelik bir takımı temsil etmektedir. Ancak bu 9 gerilme birbirinden tamamen bağımsız değildir. Aşağıda belirtilen eksenler etrafında momentler alınırsa [8]

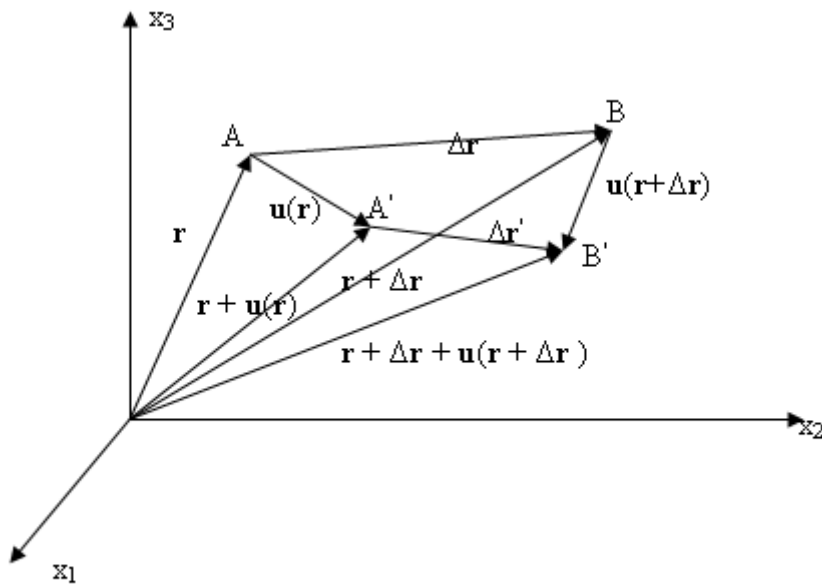
$$(\sigma_{32} dx_1 dx_2) dx_3 - (\sigma_{23} dx_1 dx_3) dx_2 = 0 \quad x_1 \text{ ekseninde etrafında} \quad (3.7)$$

$$(\sigma_{21} dx_1 dx_3) dx_2 - (\sigma_{12} dx_2 dx_3) dx_1 = 0 \quad x_3 \text{ ekseninde etrafında} \quad (3.8)$$

$$(\sigma_{13} dx_2 dx_3) dx_1 - (\sigma_{31} dx_1 dx_2) dx_3 = 0 \quad x_2 \text{ ekseninde etrafında} \quad (3.9)$$

Dolayısıyla $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ simetrik bir tensördür ve 6 bağımsız bileşeni vardır.

3.2 Gerinim Tensörü:



Şekil 3.3 Elastik cismin biçim değiştirmesi

Elastik bir cisim üzerindeki A ve B gibi iki noktadan, konum vektörü \mathbf{r} ile tanımlanan A, ve A dan olan mesfesi $\Delta\mathbf{r}$ tanımlanan B nin, $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ fonksiyonuyla tanımlanan yeni pozüsyonları A' ve B' olsun. Bu dört noktanın yarıçap vektörleri \mathbf{r} , $\Delta\mathbf{r}$ ve $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ cinsinden tanımlanmış halleri şekil 3'de verildiği gibidir. A' ve B' arasındaki mesafe $\Delta\mathbf{r}'$ ile tanımlanmıştır. Buna göre

$$\Delta\mathbf{r}' = \mathbf{A}' - \mathbf{B}' = \Delta\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{r}) \quad (3.10)$$

$\Delta\mathbf{r}$ nin şiddetindeki değişim $(\Delta r')^2 - (\Delta r)^2$ den hesaplanır. $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ gerekli türevlerinin tamamında sürekli bir fonksiyon olsun. $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$ biçiminde ortogonal sistemdeki bileşenleri cinsinden ifade edilmek üzere.

$$\Delta x'_i = \Delta x_i + u_i(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3 + \Delta x_3) - u_i(x_1, x_2, x_3) \quad (3.11)$$

$$\Delta x'_i = \Delta x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_k \quad (3.12)$$

$$\Delta x'_i \Delta x'_i = (\Delta r')^2 \quad \Delta x_i \Delta x_i = (\Delta r)^2 \quad (3.13)$$

(3.12) 'de her iki tarafın karesini alarak

$$(\Delta x'_i)^2 = (\Delta x_i)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_k\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_k \Delta x_i\right) \quad (3.14)$$

$$(\Delta x'_i)^2 = (\Delta x_i)^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_k \Delta x_k\right) + 2\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_k \Delta x_i\right) \quad (3.15)$$

i,k,m=1,2,3 indislerinde gerekli düzenlemeler yapılırsa [7]

$$(\Delta x'_i)^2 = (\Delta x_i)^2 + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \Delta x_k \Delta x_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \Delta x_k \Delta x_i + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \Delta x_k \Delta x_i \quad (3.16)$$

$$(\Delta x'_i)^2 - (\Delta x_i)^2 = \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \Delta x_k \Delta x_i \quad (3.17)$$

$$(\Delta r')^2 - (\Delta r)^2 = \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \Delta x_k \Delta x_i \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) = u_{ik} \quad (3.19)$$

dersek bu durumda

$$(\Delta r')^2 - (\Delta r)^2 = 2u_{ik} \Delta x_k \Delta x_i \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_i} \frac{\partial u_m}{\partial x_k} \quad (3.21)$$

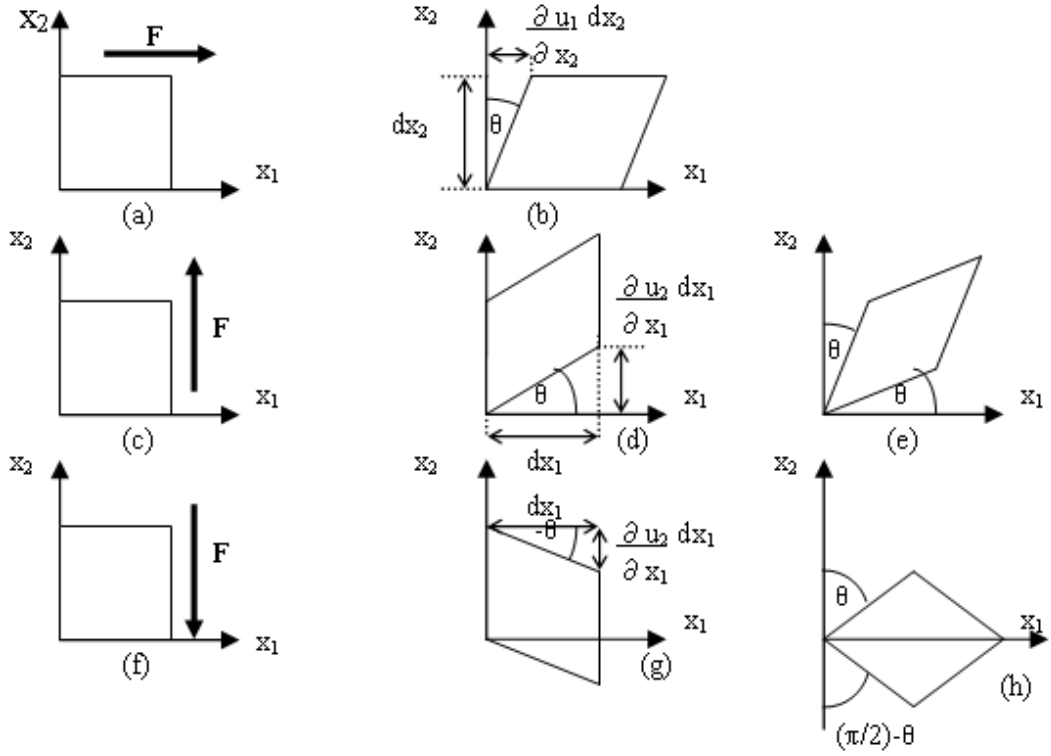
gibi 2. dereceden terimin düşmesiyle [7]

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) = u_{ik} \quad (3.22)$$

elde edilir. Bu bağlamda yer değiştirme gradyan tensör bileşenleri de şu şekilde ifade edilebilir.

$$\varepsilon_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad \text{Bu ifadenin kesme kuvvetindeki uygulamasını şekil 3.4'deki tasvirler}$$

yardımıyla incelemek istersek, \mathbf{F} kuvveti x_3 eksenindeki et kalınlığı ihmal edilebilecek kadar küçük ince



Şekil 3.4 Kesme kuvvetleri, yer değıştirme cevapları ve üst üste eklenmeleri

bir cisme [8] şekil 3.4(a)'daki gibi x_1 doğrultsu ve yönünde etkidiğinde cismin ilgili kenarı

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 \quad (3.23)$$

kadar yer değıştirir ki

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \tan \theta \quad (3.24)$$

ve küçük yer değıştirmeler için $\tan \theta \cong \theta$. \mathbf{F} kuvveti şekil 3.4(c)'deki gibi x_2 doğrultsu ve yönünde etkidiğinde yer değıştirme

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \tan \theta \quad (3.25)$$

, yine küçük yer değıştirmeler için $\tan \theta \cong \theta$, bahsi geçen iki yönde uygulanan kuvvetlerin oluşturduğu yer değıştirmeler şekil 3.4(b) ve şekil 3.4(c)'nin üst üste eklenmiş hali şekil 3.4(e)'de görülebilir ve

$$2\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (3.26)$$

şeklinde ifade bulur. Eğer düşey yöndeki kesme kuvveti x_1 doğrultusunda; ancak şekil 3.4(f)'te görüldüğü üzere - x_1 yönünde etkirse, şekil 3.4(b)'de verilen yer değiştirmeye üst üste eklendiğinde şekil 3.4(h)'deki yapı oluşur ki bunun ifadesi

$$2\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (3.27)$$

olur. Her iki kayma yer değiştirmesinin şiddeti aynı olduğundan yer değiştirme gradyan tensörü aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\varepsilon_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) = \gamma_{ik} + \omega_{ik} \quad (3.28)$$

ki bu ifadede yeralan γ_{ik} gerinim tensörü ve ω_{ik} dönme tensörüdür ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad \omega_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (3.29)$$

$\gamma_{ik} = \gamma_{ki}$ olduğundan gerinim tensörü simetrik, $\omega_{ik} = -\omega_{ki}$ olduğu için dönme tensörü antisimetriktir ve matris biçiminde yazıldıklarında diagonalin dışında kalan ögeler kayma gerinimleri, diyagonalde yeralırlarsa normal gerinimler olarak adlandırılırlar. Kayma gerinimleri açısal değişimleri temsil ederken, normal gerinimler boyca yer değiştirmelerin koordinat eksenlerine paralel olan birim uzunluklara oranlarını temsil ederler. Şekil 3.4(b)'de gösterilen yapı basit kayma olarak adlandırılır ki, yer değiştirme gradyan tensörüyle gerinim tensörünün arasındaki ilişki, sadece bu basit kaymayı ifade ettiği durumlar için, aşağıdaki gibi verilebilir.

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad \gamma_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad \varepsilon_{12} = 2\gamma_{12} \quad (3.30)$$

,

İkinci dereceden bir tensör olmasına rağmen simetrikliğinden dolayı dokuz yerine altı tane birbirinden farklı elemana sahip olduğundan daha önce bahsedilen gerinim tensörünün bu birbirinden farklı altı elemanı , $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$ gibi

yalnızca üç farklı yer değiştirmeye bağlı olduklarından, birbirinden tamamıyla bağımsız değildir. Bu kavramı irdelemeye iki boyutlu durumla başlayalım.

$$\gamma_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad \gamma_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad \gamma_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \quad (3.31)$$

Gerinim tensörü elemanlarının aşağıda gösterildiği şekilde ikinci türevleri alınırsa

$$\frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} \quad \frac{\partial^2 \gamma_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2 \partial x_1^2} \quad \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_2 \partial x_1^2} \right) \quad (3.32)$$

ifadeleriyle aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$2 \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{22}}{\partial x_1^2} \quad (3.33)$$

Bu denklem düzlem gerinimi için geçerli olan compatibility eşitliğidir. Üç boyutlu durum için gerekli şartlar aşağıda verildiği gibidir.

$$\frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} \right) \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} \right) \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \gamma_{31}}{\partial x_2} \right) \quad (3.36)$$

Ve

$$2 \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{22}}{\partial x_1^2} \quad (3.37)$$

$$2 \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \gamma_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{33}}{\partial x_2^2} \quad (3.38)$$

$$2 \frac{\partial^2 \gamma_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^2 \gamma_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{11}}{\partial x_3^2} \quad (3.39)$$

3.3 Simetrinin Elastik Sistemlerde Gerinim ve Gerilme Tensörü Arasındaki Bağıntılara Etkisi

Katı cisimler üzerinde sonsuz küçük yer değiştirmelerle yapılmış pek çok deney sonucu göstermektedir ki gerilme tensörü, gerinim tensörünün doğrusal bir fonksiyonudur.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \gamma_{kl} \quad (3.40)$$

C_{ijkl} modül tensörü dördüncü dereceden bir tensördür ve mevcut 81 bileşeni de malzeme sabitleridir. [8] Ancak bu 81 bileşenin tamamı birbirinden bağımsız değildir. Gerilme tensörü ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) ve gerinim tensörü ($\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$) simetrik olduklarından, modül tensörü de $C_{ijkl} = C_{jilk}$ biçiminde ifade bulur ve bağımsız bileşen sayısı 36'ya düşer. Bağımsız bileşen sayısının daha öte indirgeme çalışmalarına girmeden önce biçim değiştirmeyle yapılan işi (W) ifade eden eşitlikleri irdelememiz gerekmektedir.

$$W = \frac{1}{2} C_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \quad (3.41)$$

ifadedeki indis indirgemesi şu şekilde ifade edilebilir $ij = \alpha$ ve $kl = \beta$ ve simetrik tensör $A_{\alpha\beta}$ ile antisimetrik tensör $B_{\alpha\beta}$ nin toplamı olan herhangi bir tensör yazılabilir. Bu bağlamda

$$A_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta} + C_{\beta\alpha} \quad B_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta} - C_{\beta\alpha} \quad (3.42)$$

Bu defa da modül tensörü C'yi A ve B tensörleri cinsinden yazacak olursak

$$C_{\alpha\beta} = \frac{A_{\alpha\beta} + B_{\alpha\beta}}{2} \quad (3.43.a)$$

(3.43.a) denklemi (3.41) 'de yerine konulursa

$$W = \frac{1}{2} C_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} = \frac{1}{4} A_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} + \frac{1}{4} B_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha} \gamma_{\beta} \quad (3.43.b)$$

(3.43.a) denkleminin ikinci kısmın olan $B_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta} - C_{\beta\alpha}$ ifadesini , $B_{\alpha\beta}$ 'ın (3.43.a) eşitliğinin sağ tarafındaki halinde yerine koyarsak

$$\frac{1}{4}B_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta} = \left(\frac{1}{4}C_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta} - \frac{1}{4}C_{\beta\alpha}\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta} \right) = 0 \quad (3.44)$$

dolayısıyla (3.41) denkleminin yeni hali aşağıdaki gibi olur.

$$W = \frac{1}{2}C_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta} = \frac{1}{2}A_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha}\gamma_{\beta} \quad (3.45)$$

(3.45) ifadesindeki $A_{\alpha\beta}$ tensörü simetrik olduğuna göre $C_{\alpha\beta}$ de simetriktir. Dolayısıyla $C_{\alpha\beta} = C_{\beta\alpha}$ ve indirgenmiş indisler $ij=\alpha$ ve $kl=\beta$ yerlerine konduğunda $C_{ijkl} = C_{klij}$ anlamına gelir ve bağımsız bileşen sayısı 36'da 21'e düşmüş olur. Modul tensörünün bağımsız bileşenlerinin adedine dair daha ileri indirgeme durumları , incelenecek cismin konstrüksüyonundaki simetri özelliklerine bağlıdır ve temel iki simetrik durum için aşağıda ayrı ayrı ele alınacaktır.

3.4 Modül Tensörüne Ait Bağımsız Bileşenlerin Sayısının Sistem Simetrisine Bağlı Değişimi

Gerekli indirgenmiş indis gösterimleri $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 12 \rightarrow 4, 23 \rightarrow 5, 13 \rightarrow 6$ olacak şekilde gerilme ve gerinim tensörleri arasındaki ilişki matris biçiminde aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

eşitlik biçiminde ifade edildiğinde aşağıdaki hali alır.

$$\sigma_1 = C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_2 + C_{13}\gamma_3 + C_{14}\gamma_4 + C_{15}\gamma_5 + C_{16}\gamma_6 \quad (3.47)$$

$$\sigma_2 = C_{12}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2 + C_{23}\gamma_3 + C_{24}\gamma_4 + C_{25}\gamma_5 + C_{26}\gamma_6 \quad (3.48)$$

$$\sigma_3 = C_{12}\gamma_2 + C_{23}\gamma_3 + C_{33}\gamma_3 + C_{34}\gamma_4 + C_{35}\gamma_5 + C_{36}\gamma_6 \quad (3.49)$$

$$\sigma_4 = C_{14}\gamma_4 + C_{24}\gamma_4 + C_{34}\gamma_4 + C_{44}\gamma_4 + C_{45}\gamma_5 + C_{46}\gamma_6 \quad (3.50)$$

$$\sigma_5 = C_{15}\gamma_5 + C_{25}\gamma_5 + C_{35}\gamma_5 + C_{45}\gamma_5 + C_{55}\gamma_5 + C_{56}\gamma_6 \quad (3.51)$$

$$\sigma_6 = C_{16}\gamma_6 + C_{26}\gamma_6 + C_{36}\gamma_6 + C_{46}\gamma_6 + C_{56}\gamma_6 + C_{66}\gamma_6 \quad (3.52)$$

anlamının yerleşmesi açısından sadece bu defalık indirgenmiş indislerin yerine asılları konulacak olursa.

$$\sigma_{11} = C_{1111}\gamma_{11} + C_{1122}\gamma_{22} + C_{1133}\gamma_{33} + C_{1112}\gamma_{12} + C_{1123}\gamma_{23} + C_{1113}\gamma_{13} \quad (3.53)$$

$$\sigma_{22} = C_{2222}\gamma_{22} + C_{2233}\gamma_{33} + C_{2212}\gamma_{12} + C_{2223}\gamma_{23} + C_{2213}\gamma_{13} \quad (3.54)$$

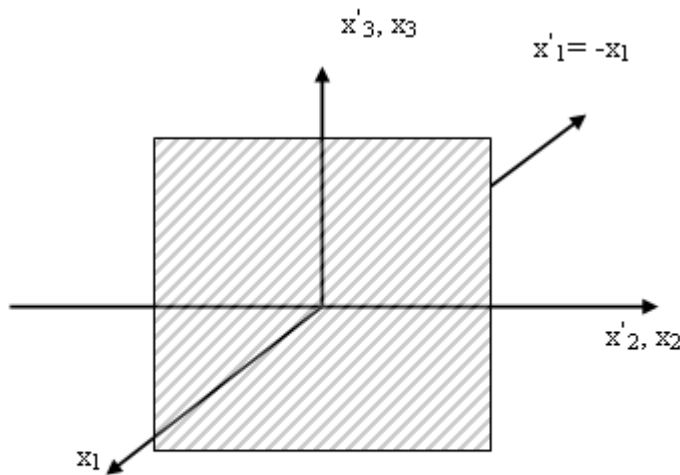
$$\sigma_{33} = C_{3333}\gamma_{33} + C_{3312}\gamma_{12} + C_{3323}\gamma_{23} + C_{3313}\gamma_{13} \quad (3.55)$$

$$\sigma_{12} = C_{1212}\gamma_{12} + C_{1223}\gamma_{23} + C_{1213}\gamma_{13} \quad (3.56)$$

$$\sigma_{23} = C_{2323}\gamma_{23} + C_{2313}\gamma_{13} \quad (3.57)$$

$$\sigma_{33} = C_{3313}\gamma_{13} \quad (3.58)$$

Aşağıda yeralan Şekil 5'te görüldüğü üzere sadece tek bir simetri düzlemi söz konusuysa (ki bu şekilde öyle ve söz konusu simetri düzlemi x_2, x_3 dolayısıyla aynı zamanda x'_2, x'_3 düzlemi) gerilme tensörü bileşenlerini x_1, x_2, x_3 eksenleri yerine, x'_1, x'_2, x'_3 eksenlerinde ifade etmek gerekirse



Şekil 3.5 Tek simetri düzlemi

$$\sigma'_{ij} = \sum_{kl} \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \frac{\partial x'_j}{\partial x_l} \sigma_{kl} = \sum_{kl} a_{i'k} a_{j'l} \sigma_{kl} \quad (3.59)$$

Doğrultman kosinüsler olan a_{ik} ve a_{jl} nin değerleri sistemin simetrisi gözönünde bulundurularak matris biçiminde yazılırsa, her iki sistemde ortogonal ve $x'_3, x_3; x'_2, x_2$ ve $x'_1, -x_1$ çakışık olduğu için

$$a_{i'k} = a_{j'l} = \begin{bmatrix} a_{1'1} & a_{1'2} & a_{1'3} \\ a_{2'1} & a_{2'2} & a_{2'3} \\ a_{3'1} & a_{3'2} & a_{3'3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x'_1, x_1) & \cos(x'_1, x_2) & \cos(x'_1, x_3) \\ \cos(x'_2, x_1) & \cos(x'_2, x_2) & \cos(x'_2, x_3) \\ \cos(x'_3, x_1) & \cos(x'_3, x_2) & \cos(x'_3, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

ve gerilme eşitlikleri aşağıdaki hali alır.

$$\sigma'_{11} = a_{11} a_{11} \sigma_{11} = \sigma_{11} \quad (3.61)$$

$$\sigma'_{22} = a_{22} a_{22} \sigma_{22} = \sigma_{22} \quad (3.62)$$

$$\sigma'_{33} = a_{33} a_{33} \sigma_{33} = \sigma_{33} \quad (3.63)$$

$$\sigma'_{12} = a_{11} a_{22} \sigma_{12} = -\sigma_{12} \quad (3.64)$$

$$\sigma'_{23} = a_{22} a_{33} \sigma_{23} = \sigma_{23} \quad (3.65)$$

$$\sigma'_{13} = a_{11} a_{33} \sigma_{13} = -\sigma_{13} \quad (3.66)$$

Aynı şekilde gerinim tensörü için de

$$\gamma'_{11} = a_{11} a_{11} \gamma_{11} = \gamma_{11} \quad (3.67)$$

$$\gamma'_{22} = a_{22} a_{22} \gamma_{22} = \gamma_{22} \quad (3.68)$$

$$\gamma'_{33} = a_{33} a_{33} \gamma_{33} = \gamma_{33} \quad (3.69)$$

$$\gamma'_{12} = a_{11} a_{22} \gamma_{12} = -\gamma_{12} \quad (3.70)$$

$$\gamma'_{23} = a_{22} a_{33} \gamma_{23} = \gamma_{23} \quad (3.71)$$

$$\gamma'_{13} = a_{11} a_{33} \gamma_{13} = -\gamma_{13} \quad (3.72)$$

elde edilen yeni ifadeler (3.46) 'de yerine konulursa

$$\begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ -\sigma_4 \\ \sigma_5 \\ -\sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ -\gamma_4 \\ \gamma_5 \\ -\gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix}$$

(3.73)

matris eşitlikler halinde yazılırsa

$$\sigma_1 = C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_2 + C_{13}\gamma_3 + \mathbf{C}_{14}\gamma_4 + C_{15}\gamma_5 + C_{16}\gamma_6 \quad (3.74)$$

$$\sigma'_1 = \sigma_1 = C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_2 + C_{13}\gamma_3 - \mathbf{C}_{14}\gamma_4 + C_{15}\gamma_5 + C_{16}\gamma_6 \quad (3.75)$$

$$\sigma_2 = C_{12}\gamma_2 + C_{22}\gamma_2 + C_{23}\gamma_3 + C_{24}\gamma_4 + C_{25}\gamma_5 + C_{26}\gamma_6 \quad (3.76)$$

$$\sigma'_2 = \sigma_2 = C_{12}\gamma_2 + C_{22}\gamma_2 + C_{23}\gamma_3 - \mathbf{C}_{24}\gamma_4 + C_{25}\gamma_5 - \mathbf{C}_{26}\gamma_6 \quad (3.77)$$

$$\sigma_3 = C_{12}\gamma_2 + C_{23}\gamma_3 + C_{33}\gamma_3 + C_{34}\gamma_4 + C_{35}\gamma_5 + C_{36}\gamma_6 \quad (3.78)$$

$$\sigma'_3 = \sigma_3 = C_{12}\gamma_2 + C_{23}\gamma_3 + C_{33}\gamma_3 + \mathbf{C}_{34}\gamma_4 + C_{35}\gamma_5 + \mathbf{C}_{36}\gamma_6 \quad (3.79)$$

$$\sigma_4 = C_{44}\gamma_4 - \mathbf{C}_{45}\gamma_5 + C_{46}\gamma_6 \quad (3.80)$$

$$\sigma_4 = -\sigma'_4 = C_{44}\gamma_4 + \mathbf{C}_{45}\gamma_5 + C_{46}\gamma_6 \quad \sigma_5 = C_{55}\gamma_5 + C_{56}\gamma_6 \quad (3.81)$$

$$\sigma'_5 = \sigma_5 = C_{55}\gamma_5 + C_{56}\gamma_6 \quad \sigma_6 = C_{66}\gamma_6 \quad \sigma'_6 = -\sigma_6 = -C_{66}\gamma_6 \quad (3.82)$$

Yukarıdaki denklemlerde koyu puntoyla vurgulanmış zıt işaretli ifadelerle rağmen birbirlerine eşit olan ifadelerin sağlanması, ancak koyu puntolu katsayıların sıfıra eşit olmasıyla mümkündür ki bu durumda $C_{14} = C_{16} = C_{24} = C_{26} = C_{34} = C_{36} = C_{45} = C_{56} = 0$ olup, bağımsız eleman sayısı 21'den 13'e düşmüş olur. İfade matris biçiminde aşağıdaki halini alır.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & C_{15} & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & C_{25} & 0 \\ & & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & C_{46} \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

Benzer şekilde cismin örneğin bir evvelkine ek olarak bir de x_2, x_1 yüzeyine göre simetrikse, doğrultman kosinüsler matrisi

$$a_{i'k} = a_{j'l} = \begin{bmatrix} a_{1'1} & a_{1'2} & a_{1'3} \\ a_{2'1} & a_{2'2} & a_{2'3} \\ a_{3'1} & a_{3'2} & a_{3'3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x'_1, x_1) & \cos(x'_1, x_2) & \cos(x'_1, x_3) \\ \cos(x'_2, x_1) & \cos(x'_2, x_2) & \cos(x'_2, x_3) \\ \cos(x'_3, x_1) & \cos(x'_3, x_2) & \cos(x'_3, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

olur ve aynı yöntemle $C_{15} = C_{25} = C_{35} = C_{46} = 0$ çıkar, bağımsız eleman sayısı 13'den 9'a düşmüş olur ve ifade aşağıdaki halini alır.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

Buna göre ilgili eşitlikler aşağıdaki son halini almış olur.

$$\sigma_1 = C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_2 + C_{13}\gamma_3 \quad (3.86)$$

$$\sigma_2 = C_{12}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2 + C_{23}\gamma_3 \quad (3.87)$$

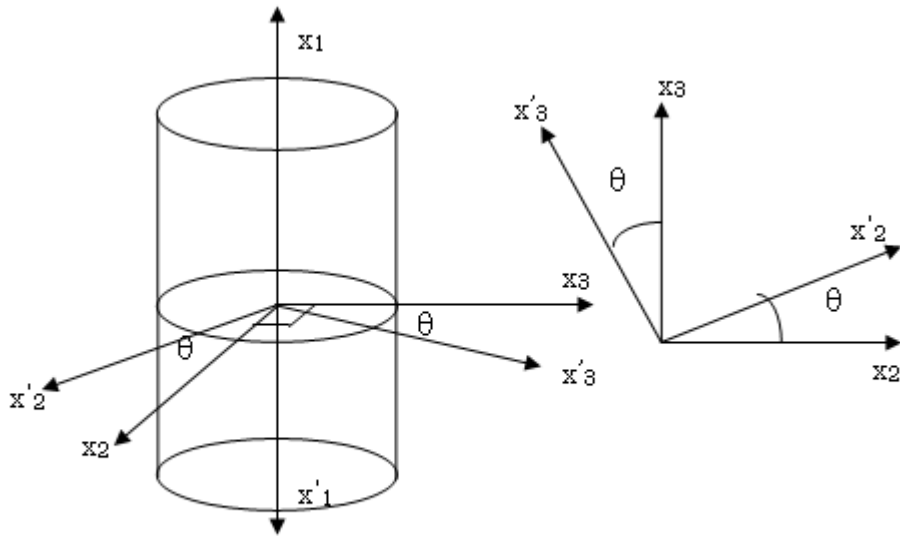
$$\sigma_3 = C_{13}\gamma_1 + C_{23}\gamma_2 + C_{33}\gamma_3 \quad (3.88)$$

$$\sigma_4 = C_{44}\gamma_4 \quad (3.89)$$

$$\sigma_5 = C_{55}\gamma_5 \quad (3.90)$$

$$\sigma_6 = C_{66}\gamma_6 \quad (3.91)$$

İleri aşamalarda statik ve dinamik basma zorlanması incelenecek olan silindir denekteki gerilme durumları , cismin silindirik simetri özelliğine binayen aşağıda açıklandığı gibidir.



Şekil 3.6 Simetri düzlemi ve eksen

daha önce ifade edildiği gibi doğrultman kosinüsleri matrisi

$$a_{i'k} = a_{j'l} = \begin{bmatrix} a_{1'1} & a_{1'2} & a_{1'3} \\ a_{2'1} & a_{2'2} & a_{2'3} \\ a_{3'1} & a_{3'2} & a_{3'3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x'_1, x_1) & \cos(x'_1, x_2) & \cos(x'_1, x_3) \\ \cos(x'_2, x_1) & \cos(x'_2, x_2) & \cos(x'_2, x_3) \\ \cos(x'_3, x_1) & \cos(x'_3, x_2) & \cos(x'_3, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Diğer yandan $\sigma'_{ij} = \sum_{kl} a_{i'k} a_{j'l} \sigma_{kl}$ ve $\gamma'_{ij} = \sum_{kl} a_{i'k} a_{j'l} \gamma_{kl}$ olduğundan σ_{11} , σ_{12} , γ_{11} , γ_{12} şu şekilde ifade edilebilir.

$$\sigma'_{11} = \sum_{kl} a_{i'k} a_{j'l} \sigma_{kl} = \sum_{kl} a_{1'k} a_{1'l} \sigma_{kl} = a_{1'1} a_{1'1} \sigma_{11} \quad (3.93)$$

$$\sigma'_{12} = \sum_{kl} a_{i'k} a_{j'l} \sigma_{kl} = a_{1'1} a_{2'l} \sigma_{kl} = a_{1'1} a_{2'2} \sigma_{12} + a_{1'1} a_{2'3} \sigma_{13} = \sigma_{12} \cos \theta + \sigma_{13} \sin \theta \quad (3.94)$$

$$\gamma'_{11} = \sum_{kl} a_{i'k} a_{j'l} \gamma_{kl} = \sum_{kl} a_{1'k} a_{1'l} \gamma_{kl} = a_{1'1} a_{1'1} \gamma_{11} = \gamma_{11} \quad (3.95)$$

$$\gamma'_{12} = \sum_{kl} a_{i'k} a_{j'l} \gamma_{kl} = a_{1'1} a_{2'l} \gamma_{kl} = a_{1'1} a_{2'2} \gamma_{12} + a_{1'1} a_{2'3} \gamma_{13} = \gamma_{12} \cos \theta + \gamma_{13} \sin \theta \quad (3.96)$$

Yukarıdaki ifadelerin son halini nasıl aldığına dair bir örnek sadece σ'_{33} için aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned} \sigma'_{33} &= \sum_{kl} a_{3'k} a_{3'l} \sigma_{kl} = a_{3'1} a_{3'1} \sigma_{11} + a_{3'1} a_{3'2} \sigma_{12} + a_{3'1} a_{3'3} \sigma_{13} \\ &\quad + a_{3'2} a_{3'1} \sigma_{11} + a_{3'2} a_{3'2} \sigma_{12} + a_{3'2} a_{3'3} \sigma_{13} \\ &\quad + a_{3'3} a_{3'1} \sigma_{11} + a_{3'3} a_{3'2} \sigma_{12} + a_{3'3} a_{3'3} \sigma_{13} \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$= \sigma_{22} \sin^2 \theta - (\sigma_{23} + \sigma_{32}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{33} \sin^2 \theta \quad (3.98)$$

gerilme tensörünün simetrikliğinden dolayı $\sigma_{23} = \sigma_{32}$

$$= \sigma_{22} \sin^2 \theta - 2\sigma_{23} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{33} \sin^2 \theta \quad (3.99)$$

indirgenmiş indis gösterimleri $11 \rightarrow 1$, $22 \rightarrow 2$, $33 \rightarrow 3$, $12 \rightarrow 4$, $23 \rightarrow 5$, $13 \rightarrow 6$ ile

$$= \sigma_2 \sin^2 \theta - 2\sigma_5 \sin \theta \cos \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta = \sigma_2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) - 2\sigma_5 \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + \sigma_3 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = \sigma_2 \quad (3.100)$$

kalan bileşenler de benzer şekilde hesaplanarak matris biçiminde aşağıdaki hali alır.

$$[\sigma'_k] = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \cos^2 \theta + \sigma_3 \sin^2 \theta + 2\sigma_5 \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_2 \sin^2 \theta + \sigma_3 \cos^2 \theta - 2\sigma_5 \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_4 \cos \theta + \sigma_6 \sin \theta \\ \sigma_5 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\sigma_3 - \sigma_2) \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_6 \cos \theta - \sigma_4 \sin \theta \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

$$[\gamma'_k] = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \cos^2 \theta + \gamma_3 \sin^2 \theta + 2\gamma_5 \sin \theta \cos \theta \\ \gamma_2 \sin^2 \theta + \gamma_3 \cos^2 \theta - 2\gamma_5 \sin \theta \cos \theta \\ \gamma_4 \cos \theta + \gamma_6 \sin \theta \\ \gamma_5 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (\gamma_3 - \gamma_2) \sin \theta \cos \theta \\ \gamma_6 \cos \theta - \gamma_4 \sin \theta \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

ifadeler sistemin x_1 eksenini etrafında $\theta = \frac{\pi}{2}$ kadar döndürülmesi sonucu aşağıdaki hali alır.

$$[\sigma'_k] = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ -\sigma_5 \\ -\sigma_6 \end{bmatrix} \quad [\gamma'_k] = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_6 \\ -\gamma_5 \\ -\gamma_6 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

(3.85)'deki ifadede yeralan simetri şartları (bkz şekil 3.5) bu örnek için de geçerli olduğundan (bkz şekil 3.6) ilgili ifade (3.85), σ'_k ve γ'_k cinsinden ifade edilirse

$$[\sigma'_k] = \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \\ -\sigma_5 \\ -\sigma_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_3 \\ \gamma_2 \\ \gamma_6 \\ -\gamma_5 \\ -\gamma_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ \gamma'_3 \\ \gamma'_4 \\ \gamma'_5 \\ \gamma'_6 \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

matris eşitliği denklem biçimde ifade edilip, eşitliğin diğer tarafına ilgili denklemler yazıldığında

$$\sigma_1 = C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_3 + C_{13}\gamma_2 = C_{11}\gamma_1 + C_{12}\gamma_2 + C_{13}\gamma_3 \quad (3.105)$$

$$\sigma_3 = C_{12}\gamma_1 + C_{22}\gamma_3 + C_{23}\gamma_2 = C_{13}\gamma_1 + C_{23}\gamma_2 + C_{33}\gamma_3 \quad (3.106)$$

$$\sigma_2 = C_{13}\gamma_1 + C_{23}\gamma_3 + C_{33}\gamma_2 = C_{12}\gamma_1 + C_{22}\gamma_2 + C_{23}\gamma_3 \quad (3.107)$$

$$\sigma_6 = C_{44}\gamma_6 = C_{66}\gamma_6 \quad (3.108)$$

$$\sigma_5 = C_{55}\gamma_5 = C_{55}\gamma_5 \quad (3.109)$$

$$\sigma_4 = C_{66}\gamma_4 = C_{44}\gamma_4 \quad (3.110)$$

elde edilir ki, buna göre $C_{33} = C_{22}$, $C_{13} = C_{12}$, $C_{66} = C_{44}$ ve C_{ijkl} modül tensörünün bağımsız bileşen sayısı 9'dan 6'ya düşmüş olur. Ve gerilme tensörüyle gerinim tensörü arasındaki ilişkinin son hali aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

Sisteme bir eksenel simetri özelliği daha eklenirse, örneğin x_3 eksenine göre, bu sistemin izotropik olduğu anlamına gelir. Bu yeni şart doğrultusunda, iki tensörün

bileşenlerini tekrar x_1, x_2, x_3 eksenleri yerine, x'_1, x'_2, x'_3 eksenlerinde ifade etmek gerekirse doğrultman kosinüsleri matrisi bu defa

$$a_{i'k} = a_{j'l} = \begin{bmatrix} a_{1'1} & a_{1'2} & a_{1'3} \\ a_{2'1} & a_{2'2} & a_{2'3} \\ a_{3'1} & a_{3'2} & a_{3'3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x'_1, x_1) & \cos(x'_1, x_2) & \cos(x'_1, x_3) \\ \cos(x'_2, x_1) & \cos(x'_2, x_2) & \cos(x'_2, x_3) \\ \cos(x'_3, x_1) & \cos(x'_3, x_2) & \cos(x'_3, x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.112)$$

σ'_k ve γ'_k tensörleri bu bağlamda

$$[\sigma'_k] = \begin{bmatrix} \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta + 2\sigma_4 \sin \theta \cos \theta & & & & & \\ \sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_2 \cos^2 \theta - 2\sigma_4 \sin \theta \cos \theta & & & & & \\ & \sigma_3 & & & & \\ (\sigma_2 - \sigma_1) \sin \theta \cos \theta + \sigma_4 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) & & & & & \\ & \sigma_5 \cos \theta - \sigma_6 \sin \theta & & & & \\ & \sigma_5 \cos \theta + \sigma_6 \sin \theta & & & & \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

$$[\gamma'_k] = \begin{bmatrix} \gamma_1 \cos^2 \theta + \gamma_2 \sin^2 \theta + 2\gamma_4 \sin \theta \cos \theta & & & & & \\ \gamma_1 \sin^2 \theta + \gamma_2 \cos^2 \theta - 2\gamma_4 \sin \theta \cos \theta & & & & & \\ & \sigma_3 & & & & \\ (\gamma_2 - \gamma_1) \sin \theta \cos \theta + \gamma_4 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) & & & & & \\ & \gamma_5 \cos \theta - \gamma_6 \sin \theta & & & & \\ & \gamma_5 \cos \theta + \gamma_6 \sin \theta & & & & \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

ifadeler sistemin bu defa x_3 eksenini etrafında $\theta = \frac{\pi}{2}$ kadar döndürülmesi sonucu aşağıdaki hali alır.

$$[\sigma'_k] = \begin{bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \\ \sigma'_4 \\ \sigma'_5 \\ \sigma'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_2 \\ \sigma_1 \\ \sigma_3 \\ -\sigma_4 \\ -\sigma_6 \\ \sigma_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_2 \\ \gamma_1 \\ \gamma_3 \\ -\gamma_4 \\ -\gamma_6 \\ \gamma_5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ \gamma'_3 \\ \gamma'_4 \\ \gamma'_5 \\ \gamma'_6 \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

matris biçimi daha önceki gibi eşitlikler dizgesi olarak düzenlenip, eşitliklerin sağ tarafına, ilgili denklemlerinin , $C_{33}= C_{22}$, $C_{13}= C_{12}$, $C_{66}= C_{44}$ 'nden yararlanılarak düzenlenmiş halleri konursa

$$\sigma_2 = c_{11}\gamma_2 + c_{12}\gamma_1 + c_{12}\gamma_3 = c_{12}\gamma_1 + c_{22}\gamma_2 + c_{23}\gamma_3 \quad (3.116)$$

$$\sigma_1 = c_{12}\gamma_2 + c_{22}\gamma_1 + c_{23}\gamma_3 = c_{11}\gamma_1 + c_{12}\gamma_2 + c_{12}\gamma_3 \quad (3.117)$$

$$\sigma_3 = c_{12}\gamma_2 + c_{23}\gamma_1 + c_{22}\gamma_3 = c_{12}\gamma_1 + c_{23}\gamma_2 + c_{22}\gamma_3 \quad (3.118)$$

$$\sigma_4 = c_{44}\gamma_4 = c_{44}\gamma_4 \quad (3.119)$$

$$\sigma_6 = c_{55}\gamma_6 = c_{44}\gamma_6 \quad (3.120)$$

$$\sigma_5 = c_{44}\gamma_5 = c_{55}\gamma_5 \quad (3.121)$$

Buna dayanarak $C_{23}= C_{12}$, $C_{11}= C_{22}$, $C_{44}= C_{55}$ olur ki bu da C_{ijkl} modül tensörünün bağımsız bileşen sayısı 6'dan 3'e düştüğü anlamına gelir. Buna ek olarak (3.113) ve (3.114) deki σ'_4 ve γ'_4 alınıp, modül tensöründeki son durumda yerine konur ve eşitlik biçiminde yazılırsa.

$$\begin{aligned} \sigma'_4 &= (\sigma_2 - \sigma_1) \sin \theta \cos \theta + \sigma_4 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \\ &= C_{44}\gamma_{44} = C_{44}((\gamma_2 - \gamma_1) \sin \theta \cos \theta + \gamma_4 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)) \end{aligned} \quad (3.122)$$

İfadedeki $(\sigma_2 - \sigma_1)$ yerine (3.116) ve (3.116)'nin farkı yazılırsa

$$(\sigma_2 - \sigma_1) = c_{12}\gamma_1 + c_{11}\gamma_2 - c_{11}\gamma_1 - c_{12}\gamma_2$$

$$\begin{aligned}
&= (c_{11} - c_{12})(\gamma_2 - \gamma_1) \sin \theta \cos \theta + \sigma_4 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \\
&= C_{44} ((\gamma_2 - \gamma_1) \sin \theta \cos \theta + \gamma_4 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta))
\end{aligned} \tag{3.123}$$

(3.89)'daki $\sigma_4 = C_{44}\gamma_4$ eşitliğinden yola çıkarak yukarıdaki ifadenin sol tarafı için

$\sigma_4 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = C_{44}\gamma_4 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$ alınırsa

$$(c_{11} - c_{12})(\gamma_2 - \gamma_1) \sin \theta \cos \theta + C_{44}\gamma_4 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \tag{3.124}$$

$$= C_{44} (\gamma_2 - \gamma_1) \sin \theta \cos \theta + C_{44}\gamma_4 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \tag{3.125}$$

$$= (c_{11} - c_{12})(\gamma_2 - \gamma_1) \sin \theta \cos \theta = C_{44} (\gamma_2 - \gamma_1) \sin \theta \cos \theta = \tag{3.126}$$

$$= (c_{11} - c_{12}) = C_{44} \tag{3.127}$$

Bu sebepten isotropik katı cisimler için C_{ijkl} modül tensörünün sadece iki adet bağımsız bileşeni vardır ki bunlar C_{11} ve C_{12} dir.

3.5 İzotropik Katılar İçin Genelleştirilmiş Hook Prensibi

C_{11} ve C_{12} katsayıları geleneksel olarak Lamé katsayıları olan λ^* ve G ile gösterilirler

$$C_{11} = \lambda + 2G \quad C_{12} = \lambda \quad C_{44} = C_{11} - C_{12} = 2G \tag{3.127}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ & & & \lambda + 2G & 0 & 0 \\ & & & & \lambda + 2G & 0 \\ & & & & & \lambda + 2G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} \tag{3.128}$$

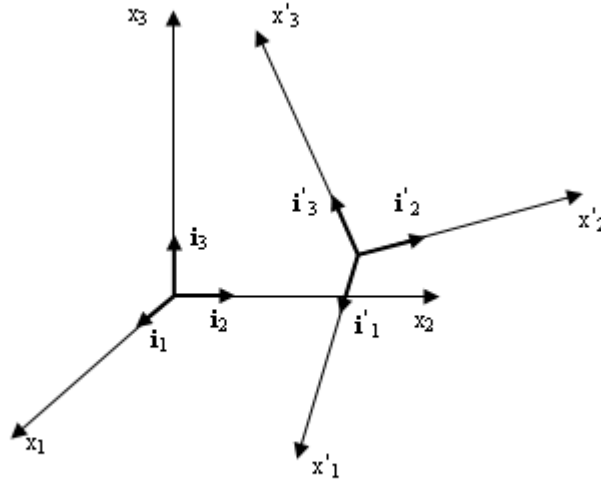
veya farklı bir ifadeyle

$$\sigma_{ij} = \lambda \Delta \delta_{ij} + 2G \gamma_{ij} \tag{3.129}$$

* Lamé sabiti olan λ , ileride değinilecek olan germe oranı λ ile karıştırılmamalıdır.

ki bu denklemdeki $\Delta = \text{trace } \gamma_{ij} = \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33}$ ve δ_{ij} Kronecker deltasıdır ki anlamına aşağıda kısaca değinilecektir.

Şekil 3.7’de görülen ortogonal sistemler K ve K’ ve ortonormal bazları $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ ve $\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3$ olmak üzere [7]



Şekil 3.7 K ve K’ ve ortonormal bazları $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ ve $\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3$

x'_1 in x_1 ile , x'_2 in x_2 ile , x'_3 in x_3 ile aralarındaki açıları toplu halde ilgili eksenlerin birim vektörleri yardımıyla \mathbf{i}'_k ve \mathbf{i}_l arasındaki açılar dizgesi olarak ifade edersek, bu aradaki açıların kosinüsleri de toplu halde $\cos(\mathbf{i}'_k, \mathbf{i}_l)$ olarak ifade bulur ki, özet bir gösterimle tanımlamak istenirse bu açıların kosinüsleri daha öncedogrultman kosinüsler matrisinde de ifade edilmiş olan notasyonuyla $a_{k'l}$ biçiminde gösterilir. K ve K’ koordinat sistemlerinin ortonormal bazları arasındaki ilişki [7]

$$\mathbf{i}'_k = a_{k'l} \mathbf{i}_l \quad (3.130)$$

$$\mathbf{i}_k = a_{l'k} \mathbf{i}'_l \quad (3.131)$$

biçiminde verilirse, K ve K’ koordinat sistemlerinin herbirinin ortonormal bazlarının da kendi aralarında skaler çarpımları alınırsa $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ ve $\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \mathbf{i}'_3$ birim vektörlerinin şiddetleri 1’e eşit olduğundan.

$$\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_m = a_{l'k} a_{l'm} \quad (3.132)$$

$$\mathbf{i}'_k \cdot \mathbf{i}'_m = a_{k'l} a_{m'l} \quad (3.133)$$

halini alır. Ortogonal olan iki sistemin herbirinin kendi eksenleri arasındaki açılar da $\pi/2$ olduğundan (3.132) ve (3.133)'deki kosinüs çarpımları aşağıda belirtilmiş şartlar doğrultusunda değer alarak toplu halde kronecker deltasıyla ifade edilir. [7]

$$\begin{aligned} \delta_{km} &= \mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_m = a_{l'k} a_{l'm} = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ 1 & k = m \end{cases} \\ \delta'_{km} &= \mathbf{i}'_k \cdot \mathbf{i}'_m = a_{k'l} a_{m'l} = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ 1 & k = m \end{cases} \end{aligned} \quad (3.134)$$

$$\delta_{km} = a_{l'k} a_{l'm} \quad \delta'_{km} = a_{k'l} a_{m'l} \quad (3.135)$$

İsotropik katılar için elastisitenin genelleştirilmiş esas eşitliği olarak bilinen (3.129)'e geri dönecek olursak, ifadede yer alan $\Delta = \text{trace } \gamma_{ij}$ kavramının fiziksel anlamını tasvir için ayrıtlarının serbest konumdaki bıyları L_{01}, L_{02}, L_{03} olan bir prizma düşünelim, bir dış kuvvet nedeniyle ayrıtların yeni boyları L_1, L_2, L_3 olsun. Ufak yer değiştirmeler için gerinim tensörü bileşenleri aşağıdaki gibi tanımlanır. [9]

$$\gamma_{ii} = \frac{L_i - L_{0i}}{L_{0i}} \quad i = 1, 2, 3$$

Biçim değiştirmiş cismin hacmi V , serbest konumdaki hacmi V_0 olmak kaydıyla

$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{L_1}{L_{01}} \right) \left(\frac{L_2}{L_{02}} \right) \left(\frac{L_3}{L_{03}} \right) = (1 + \gamma_{11})(1 + \gamma_{22})(1 + \gamma_{33}) \quad (3.136)$$

İfadenin sağ tarafının açılımda 2. derece ve yukarısı terimler, çok ufak yer değiştirmeler mevzu bahis olduğundan, ihmal edilirse

$$\frac{V}{V_0} = 1 + \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} = 1 + \Delta = 1 + \text{trace } \gamma_{ij} \quad (3.137)$$

olur ki bu ifade de aşağıdaki gibi düzenlendiğinde,

$$\frac{V}{V_0} - 1 = \text{trace } \gamma_{ij} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{\Delta V}{V_0} = \Delta \quad (3.138)$$

Açıkça görüleceği üzere Δ izotropik katı cismin yük altındaki hacim değiştirme oranını temsil eder ve gerinim tensörü γ_{ij} , yer değiştirme tensörü γ_{ij}^Δ ve deviatorik tensör γ_{ij}^d 'nin toplamı olarak ifade edilebilir.

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^\Delta + \gamma_{ij}^d \quad (3.139)$$

Bu ifadede yeralan

$$\gamma_{ij}^\Delta = \frac{1}{3} \text{diag}(\Delta, \Delta, \Delta) = \frac{\Delta \delta_{ij}}{3} \quad (3.140)$$

ve deviatorik tensör de,

$$\gamma_{ij}^d = \gamma_{ij} - \gamma_{ij}^\Delta = \begin{bmatrix} \gamma_{11} - \frac{\Delta}{3} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ & \gamma_{11} - \frac{\Delta}{3} & \gamma_{23} \\ & & \gamma_{11} - \frac{\Delta}{3} \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

(3.129) eşitliğindeki gerinim tensörü, bu defa yer değiştirme ve deviatoric bileşenleriyle ifade edilecek olursa (3.129) denklemi aşağıdaki halini alır.

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda + \frac{2}{3}G \right) \Delta \delta_{ij} + 2G \gamma_{ij}^d = K \Delta \delta_{ij} + 2G \gamma_{ij}^d \quad (3.142)$$

Eşitlikteki bulk (yığılma) modülü diye adlandırılan K değeri şu şekilde ifade edilir.

$$K = \left(\lambda + \frac{2}{3}G \right) \quad (3.143)$$

dolayısıyla (3.129) eşitliği aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda - \frac{2}{3}G \right) \Delta \delta_{ij} + 2G \gamma_{ij} \quad (3.144)$$

Gerinim tensörünün, bileşenleri toplamı cinsinden yazılmasına benzeşen bir uslupla gerilme tensörü de yer değiştirme bileşeni σ^Σ ve deviatorik bileşen σ^d nin toplamı cinsinden ifade edilebilir.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^\Sigma + \sigma_{ij}^d \quad (3.145)$$

gerinim tensöründekine benzer biçimde, gerilme tensörünün yer değiştirme bileşeni

$$\sigma_{ij}^\Sigma = \frac{1}{3} \text{diag}(\Delta, \Delta, \Delta) = \frac{\Sigma \delta_{ij}}{3} \quad (3.146)$$

ve ifadede yeralan Σ da aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\Sigma = \text{trace } \sigma_{ij} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \quad (3.147)$$

dolayısıyla deviatorik bileşen de

$$\sigma_{ij}^d = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \frac{\Sigma}{3} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{11} - \frac{\Sigma}{3} & \sigma_{23} \\ & & \sigma_{11} - \frac{\Sigma}{3} \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

ifade edildiğinde aşağıdaki denklemler de süregelen eşitliklerin kobinasyonu ile elde edilmiş olur.

$$\sigma_{ij} = \left(\lambda + \frac{2}{3}G \right) \Delta \delta_{ij} = K \Delta \delta_{ij} = 3K \gamma_{ij}^\Delta \quad (3.149)$$

$$\sigma_{ij}^d = 2G \gamma_{ij}^\Delta \quad (3.150)$$

ki bu eşitliklerin yazılmasına yardımcı olan ve gerinim ile gerilme tensörleri için sağlanacağı aşikar iki ifade de aşağıda verilmiştir.

$$\text{trace } \gamma_{ij}^d = 0 \quad \text{trace } \sigma_{ij}^d = 0 \quad (3.151)$$

Eğer elastik bir cisim, sadece asal eksenlerinden biri doğrultusunda bir kuvvete maruz kalıyorsa, ki bu örnekte seçilen eksen asal x_1 olsun.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

olur ve izotropik sistem için $\gamma_{22} = \gamma_{33}$ olduğundan

$$\sigma_{11} = \lambda(\gamma_{11} + 2\gamma_{22}) + 2G\gamma_{11} \quad (3.153)$$

$$\sigma_{22} = 0 = \lambda(\gamma_{11} + 2\gamma_{22}) + 2G\gamma_{22} \quad (3.154)$$

Bu ifadelerin sonucu (3.143) eşitliğiyle birleştirilirse, elastiklik modülü E yalnızca bu örnekte belirlenmiş şartlar için

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\gamma_{11}} = \frac{9KG}{3K + G} \quad (3.155)$$

ifadesi elastiklik modülünü kayma modülüyle ilişkilendirir ki $K \gg G$ için ifade

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\gamma_{11}} = \frac{9KG}{3K + G} \cong \frac{9KG}{3K} = 3G \quad E \cong 3G \quad (3.156)$$

Gerinim tensörünün diyagonalindeki bileşenlerinin bu örnekteki şartlar ve izotropik malzeme ($\gamma_{22} = \gamma_{33}$) için oranını aşağıdaki gibi ifade edersek

$$\nu = -\frac{\gamma_{22}}{\gamma_{11}} = -\frac{\gamma_{33}}{\gamma_{11}} = \frac{3K - 2G}{6K + 2G} \quad (3.157)$$

oranı elde edilir ki bu ifadedeki ν Poisson oranı diye adlandırılır. Hacmin sabit kaldığı kabulüne uyan malzemelerden biri kabul edilebilecek olan, ve neredeyse sıkıştırılmaz olarak adlandırılan kauçuk için de $K \gg G$ olduğundan ifade $\nu = 0.5$ olarak kabul edilebilir.

Kauçuğun sıkıştırılabilirliğinin hesaba katıldığı durumlarda ise formüllere yığılma modülü K nın da girmesi gerekir, ki bu yığılma modülü K nın ölçümü için

ileride ayrıntılarıyla değinilecek olan ölçüm düzeneği birazdan anlatılacak olan konunun fiziksel örneğini teşkil etmektedir.

Diyelim ki elastik cisim x_1 eksenine doğrultusunda basma ya da çekmeye maruz kalıyor ve x_2 ve x_3 doğrultularında herhangi bir yer değiştirmeye müsaade edilmiyor. Bu durumda isotropik katılar için gerilme ve gerinim tensörleri

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad \gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.158)$$

biçiminde ifade edilir ve (3.144) denklemi bu şartlar doğrultusunda düzenlendiğinde

$$\sigma_{11} = \left(K - \frac{2}{3}G \right) \gamma_{11} + 2G\gamma_{11} = \left(K + \frac{4}{3}G \right) \gamma_{11} \quad (3.159)$$

ve ilgili gerilme tensör bileşeninin, gerinim tensör bileşenine oranı

$$\frac{\sigma_{11}}{\gamma_{11}} = \left(K + \frac{4}{3}G \right) \quad (3.160)$$

Diğer yandan

$$\sigma_{22} = \left(K - \frac{2}{3}G \right) \gamma_{11} + 2G\gamma_{22} \quad \text{ve bu örnekte } \gamma_{22} = 0 \text{ olduğu için}$$

σ_{22}/σ_{11} oranı

$$\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}} = \frac{3K - 2G}{3K + 4G} \quad (3.161)$$

ve kauçukta $K \gg G$ olduğundan

$$\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{11}} = \frac{3K - 2G}{3K + 4G} = \frac{3K}{3K} = 1 \quad (3.162)$$

ve bu örnek için $\sigma_{22} = \sigma_{33}$ olduğundan, $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$ bulunur ki sistem hidrostatik basınç $-p$ nin altında olduğu anlamına gelir.

İrdelenen belli başlı örnekler sonucu görülmüştür ki elastik bir cismin gerilme durumlarını ifade etmekte kullanılan E, G, K, ν niceliklerinin her biri, herhangi

diğer ikisi cinsinden ifade edilebilmektedir. Türetilebilecek eşitlikler çapraz konbinlenmiş halde aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 1 E, G, K, ν arasındaki bağıntılar

	$G \text{ ve } E$	$G \text{ ve } \nu$	$K \text{ ve } E$	$K \text{ ve } \nu$	$K \text{ ve } G$	$E \text{ ve } \nu$
K	$\frac{EG}{(9G-3E)}$	$\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$				$\frac{E}{3(1-2\nu)}$
G			$\frac{3KE}{(9K-E)}$	$\frac{2K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$		$\frac{E}{2(1+\nu)}$
E	$2G(1+\nu)$		$3K(1-2\nu)$	$\frac{9KG}{(3K+G)}$		
ν	$\left(\frac{E}{2G}\right)^{-1}$	$\frac{1}{2} - \frac{E}{6K}$		$\frac{((3/2)K-G)}{(3K+G)}$		

Dinamiğin 2. kanunu olarak da anılan [8] $d i \sigma + b = \rho a$ eşitliğini doğrusal elastiklik için yazmak istersek $d i v \sigma + b = 0$ elde edilir ki bunun yardımıyla denge denklemlerini yer değiştirmeler cinsinden ifade etmek gerekirse, cisim ağırlığı ve ataletler ihmal edildiğinde aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (3.163)$$

(1.21) eşitliğindeki nicelikler Tablo 1’de verilen bağıntılarla düzenlenirse aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\gamma_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \gamma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (3.164)$$

(3.164) eşitliği (3.163)’de yerine konursa aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\frac{E}{(1+\nu)} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial \gamma_{kk}}{\partial x_j} = 0 \quad (3.165)$$

İfadedeki γ_{kk} değerleri yerine $\frac{\partial u_k}{\partial x_k}$ ve γ_{ij} değerleri yerine $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$

konulduğunda

$$\frac{E}{(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \quad (3.166)$$

elde edilir ki, indislere dair gerekli değişikler yapıp eşitlik düzenlendiğinde aşağıdaki biçimi alır.[8]

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \quad (3.167)$$

halini alır ki bilinen matematiksel gösterimler yardımıyla da daha kısa bir biçimde ifade edilebilir. Bunun için olan del ya da nabla olarak anılan ∇ imiyle uygulanan işlem olan gradyan [7]

$$\nabla = \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (3.168)$$

diverjans olarak adlandırılan [7]

$$div \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) (A_1 \mathbf{i}_1 + A_2 \mathbf{i}_2 + A_3 \mathbf{i}_3) = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = \frac{\partial A_k}{\partial x_k} \quad (3.169)$$

bileşik bir işlem olan

$$\nabla div \mathbf{A} = \left(\mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \right) = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_l} \right) = \mathbf{i}_k \frac{\partial^2 A_l}{\partial x_k \partial x_l} \quad (3.170)$$

ve Δ ile gösterilen Laplasyan işlemcisi olarak bilinen [7]

$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \mathbf{i}_l \frac{\partial}{\partial x_l} = (\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_l) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \quad (3.171)$$

yukarıda örneklenen durum için düzenlenmiş haliyle

$$\Delta \equiv \nabla \cdot \nabla = \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_k} = (\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_k) \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = 1.1.\cos(0) \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \quad (3.172)$$

Bu hatırlatmalar ışığında (3.167) denklemi yeniden düzenlendiğinde

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \nabla div \mathbf{u} = 0 \quad (3.173)$$

elde edilir ki bu eşitlik literatürde, farklı notasyonlardaki birkaç ifade ediliş biçimi olmakla beraber, Navier denklemi olarak bilinir.[8]

3.6 İdeal Elastik Sistemler İçin Genelleştirilmiş Gerilme-Gerinim İlişkileri

Eğer elastik bir katı sonsuz küçük (infinitesimal) bir temas kuvvetinin etkisindeyse, gerinim tensörünün gerilme tensörüne bağlı ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$\gamma_{ij} = R_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (3.174)$$

İfadedeki R_{ijkl} , uyum (compliance) tensörü olarak adlandırılıp C_{ijkl} ile benzeşen bir durumla sadece iki bağımsız bileşene sahiptir, bu ayrıntı ışığında, daha önce de değinilmiş indirgenmiş indis gösterimleri $11 \rightarrow 1$, $22 \rightarrow 2$, $33 \rightarrow 3$, $12 \rightarrow 4$, $23 \rightarrow 5$, $13 \rightarrow 6$ yı da kullanarak aşağıdaki matris biçimiyle ifade edilebilir.

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & R_{11} & R_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & R_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & & R_{44} & 0 & 0 \\ & & & & R_{44} & 0 \\ & & & & & R_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (3.175)$$

Buna mukabil $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \gamma_{kl}$ ifadesinden yola çıkarak aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\gamma_i = (C_{ij})^{-1} \sigma_j = R_{ij} \sigma_j \quad (3.176)$$

İfadede yeralan R_{ij} , C_{ij} matrisinin tersi olup, C_{ij} matrisi sözde diagonal (pseudodiagonal) bir matris olduğundan R_{44} bileşeni aşağıdaki ifadeyle hesaplanır.

$$R_{44} = C_{44}^{-1} = (2G)^{-1} = \frac{1}{2G} = \frac{J}{2} \quad (3.177)$$

ki ifadedeki $J = \frac{1}{G}$ olup kesme uyum fonksiyonu olarak anılır. [8] Geri kalan R_{ij}

bileşenleri aşağıda verilen matrisin (modül tensörünün matris ifadesindeki diyagonal olmayan kısım) tersi alınarak hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} \\ & C_{11} & C_{12} \\ & & C_{11} \end{bmatrix} \quad (3.178)$$

ve ilgili R_{ij} bileşenlerini tanımlamak gerekirse

$$R_{11} = \frac{C_{11}^2 - C_{12}^2}{\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} \\ & C_{11} & C_{12} \\ & & C_{11} \end{vmatrix}} \quad R_{12} = \frac{C_{12}(C_{12} - C_{11})}{\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} \\ & C_{11} & C_{12} \\ & & C_{11} \end{vmatrix}} \quad (3.179)$$

ilgili ifadelerde daha önce değinilmiş olan $C_{11} = \lambda + 2G$, $C_{12} = \lambda$, $J = \frac{1}{G}$

$$K = \left(\lambda + \frac{2}{3}G \right)$$

yerlerine konulduğunda

$$R_{11} = \frac{3K + G}{9KG} = \frac{J}{3} + \frac{B}{9} \quad \text{ve} \quad R_{12} = \frac{2G - 3K}{18KG} = \frac{B}{9} - \frac{J}{6} \quad (3.180)$$

bulunur ki bu ifadelerde yer alan $B = \frac{1}{K}$ yığılma uyum fonksiyonu (bulk compliance) olarak adlandırılır. Bu eşitliklerin ışığında matris biçimindeki (3.175) ifadesi yeniden düzenlenecek olursa

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{J}{3} + \frac{B}{9} & \frac{B}{9} - \frac{J}{6} & \frac{B}{9} - \frac{J}{6} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{J}{3} + \frac{B}{9} & \frac{B}{9} - \frac{J}{6} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{J}{3} + \frac{B}{9} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{J}{2} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{J}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{J}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (3.181)$$

Bundan faydalanılarak gerinim ve gerilme arasındaki ilişkinin genelleştirilmiş hali aşağıdaki biçimde yazılabilir.

$$\gamma_{ij} = \left(\frac{B}{9} - \frac{J}{6} \right) \Sigma \delta_{ij} + \frac{J}{2} \sigma_{ij} \quad (3.182)$$

İfadede yeralan $\Sigma = \text{trace } \sigma_{ij} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ dır.

3.7 Uyum Fonksiyonları Arasındaki İlişkiler

Yine tek eksenli gerilme durumunu örneklemek gerekirse, elastik katı cismin asal eksenlerinden sadece x_1 'de basma ya da çekme zorlanmasına maruz kaldığını düşünelim, bu durumda gerilme tensöründe sıfır olmayan tek bileşen σ_{11} olur ve γ_{11} ile ilişkisi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\gamma_{11} = \left(\frac{B}{9} + \frac{J}{3} \right) \sigma_{11} \quad (3.183)$$

Bu bağlamda çekme uyum fonksiyonu diye anılan D aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$D = \frac{\gamma_{11}}{\sigma_{11}} = \frac{B}{9} + \frac{J}{3} \quad (3.184)$$

Ki bu durumda K kauçuk için çok büyük bir değer olduğundan $B = \frac{1}{K} \rightarrow 0$ olduğu kabul edilirse $B = \frac{J}{3}$ olur. Tek eksenli gerilme durumu için gerinim tensörü

$$\gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33} \end{bmatrix}$$

'nün, izotropik malzeme olduğu için bu şartlar çerçevesinde birbirlerine eşit olan kalan bileşenleri

$$\gamma_{22} = \gamma_{33} = \left(\frac{B}{9} - \frac{J}{6} \right) \sigma_{11} \quad (3.185)$$

ifadesiyle bulunur ki (3.183) yardımıyla Poisson oranı aşağıdaki şekliyle elde edilmiş olur.

$$\nu = \frac{\gamma_{22}}{\gamma_{11}} = \frac{\gamma_{33}}{\gamma_{11}} = \frac{\frac{B}{9} - \frac{J}{6}}{\frac{B}{9} + \frac{J}{3}} \quad (3.186)$$

yukarıda ifade edildiği sebepten ötürü $B = \frac{1}{K} \rightarrow 0$ olduğu kabul edilirse Poisson

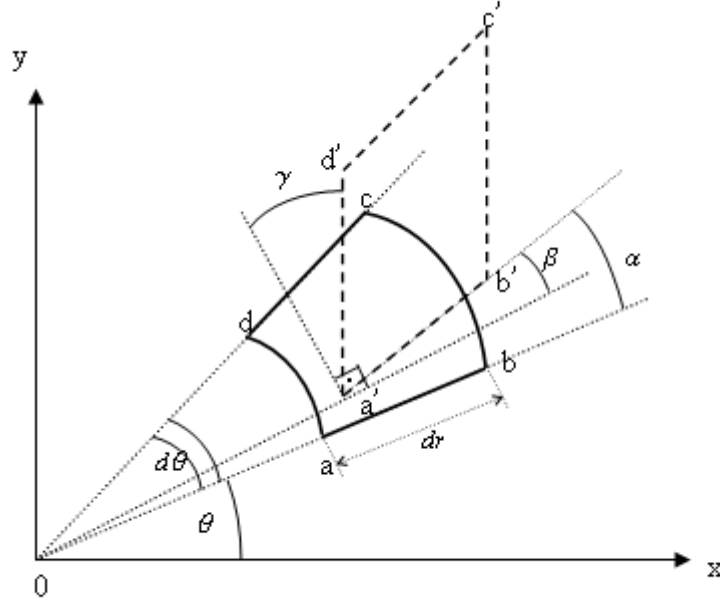
oranı $\nu = 0.5$ olur ki bu kauçuk için de çoğunlukla kabul gören sıkıştırılamazlık ilkesini (hacim sabitliği) ifade eder. Bu bağlamda görülmüştür ki J, D, B, ν niceliklerinin her biri, herhangi diğer ikisi cinsinden ifade edilebilmektedir. Türetilebilecek eşitlikler çapraz konbinlenmiş halde aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 2 J, D, B, ν arasındaki bağıntılar

	J ve D	J ve ν	D ve ν	B ve D	B ve ν	B ve J
B	$9D - 3J$	$\frac{3J(1-2\nu)}{2(1+2\nu)}$	$3D(1-2\nu)$			
J			$2D(1+2\nu)$	$3D - \frac{B}{3}$	$\frac{2B(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$	
D		$\frac{J}{2(1+2\nu)}$			$\frac{B}{3(1-2\nu)}$	$\frac{B}{9} + \frac{J}{3}$
ν	$\frac{J}{2D} - 1$			$\frac{1}{2} - \frac{B}{6D}$		$\frac{(3J-2B)}{(6J+2B)}$

3.8 Gerilmenin Silindirik Koordinatlardaki İfadelerinin Çıkartılması

İleride incelenecek olan kauçuk diskin statik, dinamik ve ömür testlerinde silindirik biçime haiz bir elemanın gerilme ve gerinim ilişkileri inceleneceğinden yukarıda elde ettiğimiz gerinim tensörü bileşenlerini, silindirik koordinatlar için yazmak gerekirse



Şekil 3.8 Yer değiştirme vektörünün silindirik koordinatlarda gösterimi

Şekil 3.8'deki verilere binayen radyal, açısıl ve eksenel yer değiştirmeler sırasıyla u_r, u_θ, u_z olarak tanımlanacak olursa a ve b noktaları arasındaki yer değiştirme vektörün \overline{ab} nin şiddetinin radyal eksenindeki skaler bileşeni $\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)dr$ olarak ifade edilecek olursa

$$\gamma_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (3.187)$$

\overline{ad} nin şiddetinin açısıl (teğetsel) ve eksenel koordinat eksenlerindeki skaler bileşenleri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$(r + u_r)d\theta - rd\theta + u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}d\theta - u_\theta = u_r d\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}d\theta \quad (3.188)$$

Dolayısıyla

$$\gamma_{\theta\theta} = \left(u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right)d\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \quad (3.189)$$

$\gamma_{r\theta}$ yı bulmak için Şekil 7'deki verileri benzer biçimde düzenleyerek

$$2\gamma_{r\theta} = dab - d'a'b' = \frac{\pi}{2} - d'a'b' = \beta + \gamma \quad (3.190)$$

$$\beta = \alpha - a0a' = \left(\left(u_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} dr \right) - u_\theta \right) \frac{1}{dr} - \frac{u_\theta}{r} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \quad (3.191)$$

$$\gamma = \left(u_r + \frac{\partial u_r}{\partial \theta} d\theta - u_r \right) \frac{1}{r \partial \theta} = \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} \quad (3.192)$$

bu doğrultuda

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (3.193)$$

benzer şekilde dr , dz düzleminde çalışılırsa

$$\gamma_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \gamma_{zr} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (3.194)$$

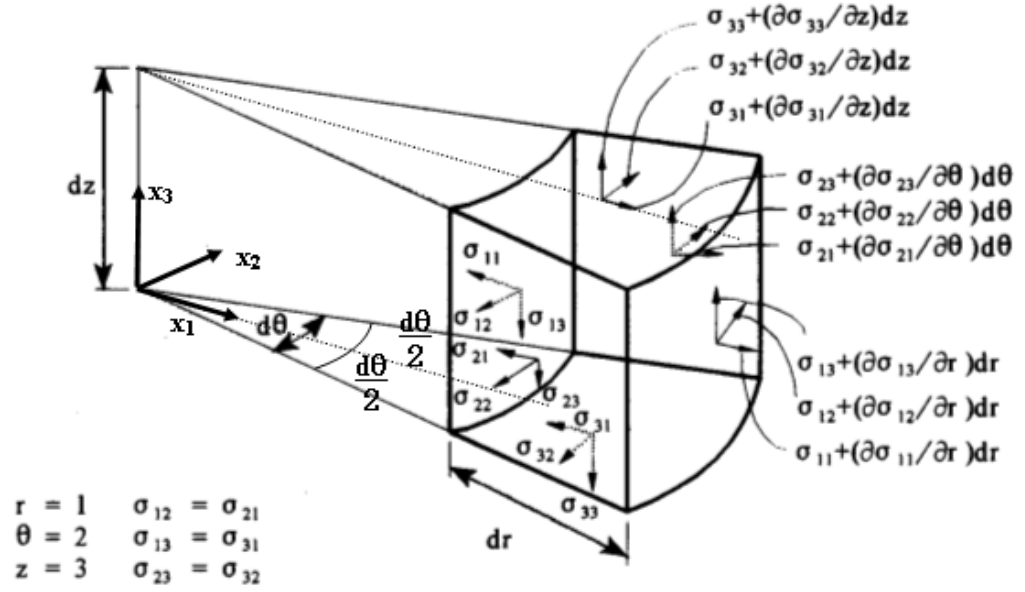
ve $rd\theta$, dz de

$$\gamma_{z\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \quad (3.195)$$

elde edilir ki örneğin , aksenal simetriye haiz bir örnekte , z eksenini etrafındaki bir dönöl simetri için , gerinim tensörü sadece r 'ye bağlıdır ve buna mukabil aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\gamma_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \gamma_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \quad (3.196)$$

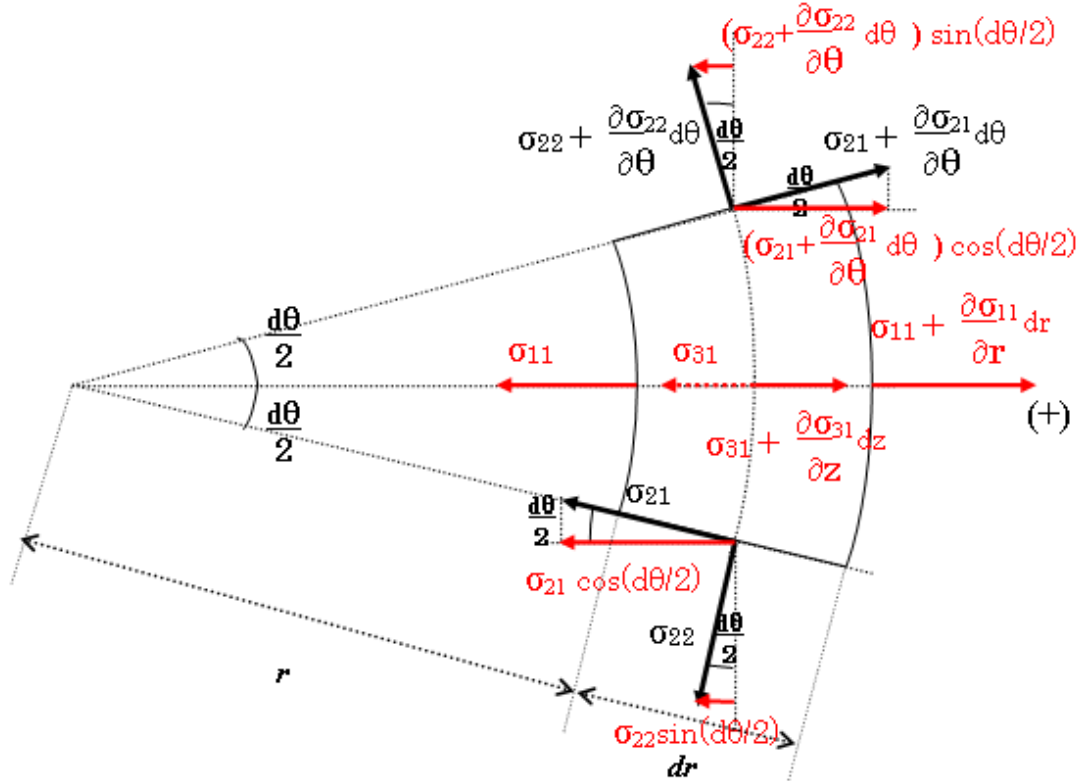
Buna paralel olarak silindirik bir hacmin çok ufak bir keskinde denge denklemleri elde edilmek istenirse aşağıda yer alan Şekil 8'deki verilerden faydalanarak



Şekil 3.9 Silindirik hacimde gerilme durumları

Şekil 3.9'daki yapıya radyal doğrultudaki denge eşitliği olan $\Sigma f_r = 0$ yazmak için x_3 yönünde bakmak gerekirse, aşağıdaki alt başlık kapsamında yer alan Şekil 3.10'da da görülebileceği üzere

3.8.1 Silindirik Koordinatlarda denge denklemi dr ekseni bileşenleri için $\Sigma f_r = 0$



Şekil 3.10 Silindirik koordinatlarda denge denklemi dr ekseni bileşenleri için $\Sigma f_r = 0$

İlgili gerilme bileşenlerini, etkidikleri yüzey alanlarıyla çarpıp kuvvetler toplamını sıfıra eşitlemek gerekirse

$$\begin{aligned}
& \left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \sigma_{11} r d\theta dz + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \theta} d\theta \right) \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) dr dz - \sigma_{21} \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) dr dz \\
& - \left(\sigma_{22} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} d\theta \right) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) dr dz - \sigma_{22} \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) dr dz + \left(\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} dz \right) \left(r + \frac{dr}{2} \right) d\theta dr \\
& - \sigma_{31} \left(r + \frac{dr}{2} \right) d\theta dr + b_r r dr d\theta dz = 0
\end{aligned} \tag{3.197}$$

İfadedeki $b_r r dr d\theta dz$ hidrostatik bileşen olup eşitlikte yer alan $d\theta$ ve $d\theta/2$ çok küçük değerler olduğundan aşağıdaki kabuller yapılabilir.

$$d\theta \ll \varepsilon \quad \tan\left(\frac{d\theta}{2}\right) \cong \frac{d\theta}{2} \quad \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) \cong \cos(0) = 1 \quad \tan\left(\frac{d\theta}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right)}{1} = \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) \cong \frac{d\theta}{2}$$

(3.198)

Bu kabuller ışığında denge denklemi yeniden düzenlenecek olursa

$$\begin{aligned}
& \sigma_{11} r d\theta dz + \sigma_{11} dr d\theta dz + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} r dr d\theta dz + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} (dr)^2 d\theta dz - \sigma_{11} r d\theta dz \\
& \sigma_{21} dr dz + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \theta} d\theta dr dz - \sigma_{21} dr dz - \sigma_{22} \left(\frac{d\theta}{2}\right) dr dz \\
& - \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} \left(\frac{d\theta}{2}\right) (dr)^2 dz - \sigma_{22} \left(\frac{d\theta}{2}\right) dr dz
\end{aligned} \tag{3.199}$$

$$\begin{aligned}
& r \sigma_{31} d\theta dr + \sigma_{31} d\theta \frac{(dr)^2}{2} + r \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} dz d\theta dr + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} dz d\theta \frac{(dr)^2}{2} \\
& - r \sigma_{31} d\theta dr - \sigma_{31} d\theta \frac{(dr)^2}{2} + b_r r dr d\theta dz = 0
\end{aligned} \tag{3.200}$$

İfadedeki ikinci dereceden terimler ihmal edilirse

$$\begin{aligned}
& \sigma_{11} r d\theta dz + \sigma_{11} dr d\theta dz + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} r dr d\theta dz - \sigma_{11} r d\theta dz + \sigma_{21} dr dz \\
& + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \theta} d\theta dr dz - \sigma_{21} dr dz - \sigma_{22} \left(\frac{d\theta}{2}\right) dr dz - \sigma_{22} \left(\frac{d\theta}{2}\right) dr dz
\end{aligned}$$

$$+ r \sigma_{31} d\theta dr + r \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} dz d\theta dr - r \sigma_{31} d\theta dr + b_r r dr d\theta dz = 0 \quad (3.201)$$

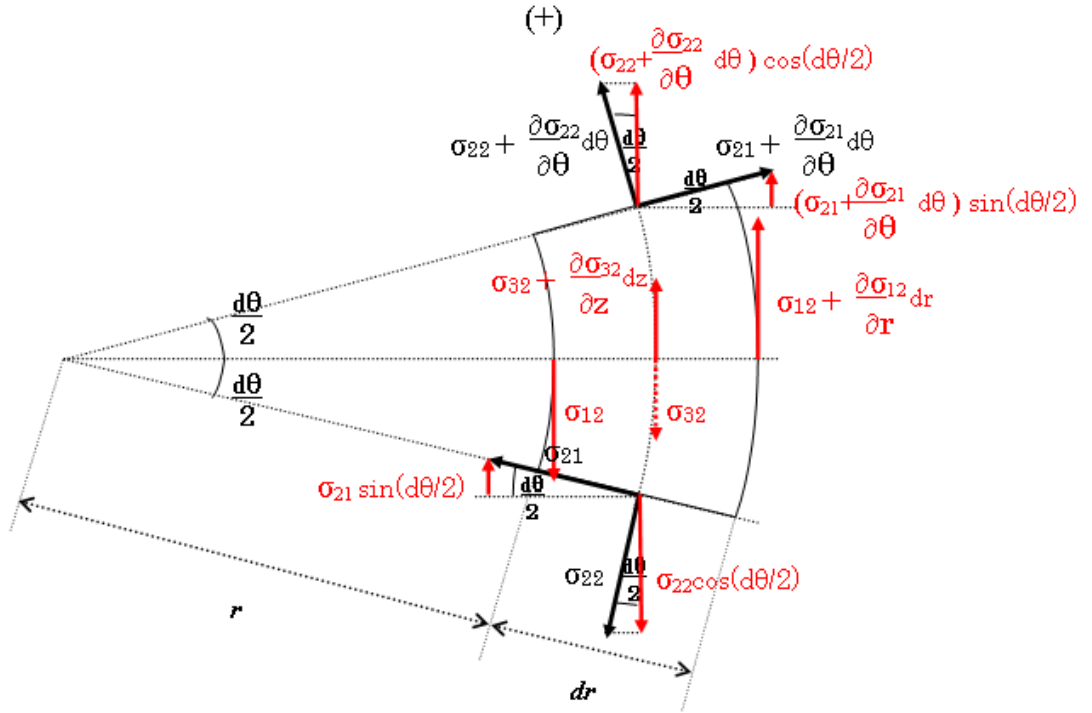
$$\begin{aligned} \sigma_{11} dr d\theta dz + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} r dr d\theta dz + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \theta} d\theta dr dz - \sigma_{22} d\theta dr dz \\ + r \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} dz d\theta dr + b_r r dr d\theta dz = 0 \end{aligned} \quad (3.202)$$

Her iki tarafı da $b_r r dr d\theta dz$ ye bölersek

$$\frac{\sigma_{11}}{r} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \sigma_{22} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} + b_r = 0 \quad (3.203)$$

Benzer şekilde $d\theta$ eksenini için aşağıdaki şekil 3.11’de yer alan veriler doğrultusunda $\Sigma \mathbf{f}_\theta = 0$ yazmak gerekirse

3.8.2 Koordinatlarda denge denklemi $d\theta$ eksenini bileşenleri için $\Sigma \mathbf{f}_\theta = 0$



Şekil 3.11 Silindirik koordinatlarda denge denklemi $d\theta$ eksenini bileşenleri için $\Sigma \mathbf{f}_\theta = 0$

$$\left(\sigma_{22} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} d\theta \right) \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) dr dz - \sigma_{22} \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) dr dz + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \theta} d\theta \right) \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) dr dz$$

$$\begin{aligned}
& + \sigma_{21} \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) dr dz + \left(\sigma_{32} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} dz\right) \left(r + \frac{dr}{2}\right) d\theta dr - \sigma_{32} \left(r + \frac{dr}{2}\right) d\theta dr \\
& + \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r} dr\right) (r + dr) d\theta dz - \sigma_{12} r d\theta dr + b_\theta r dr d\theta dz = 0
\end{aligned} \tag{3.203}$$

ifade devam ettirilecek olursa

$$\begin{aligned}
& \left(\sigma_{22} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} d\theta\right) dr dz - \sigma_{22} dr dz + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \theta} d\theta\right) \frac{d\theta}{2} dr dz + \sigma_{21} \frac{d\theta}{2} dr dz \\
& + \left(\sigma_{32} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} dz\right) \left(r + \frac{dr}{2}\right) d\theta dr - \sigma_{32} \left(r + \frac{dr}{2}\right) d\theta dr + \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r} dr\right) (r + dr) d\theta dz \\
& - \sigma_{12} r d\theta dr + b_\theta r dr d\theta dz = 0
\end{aligned} \tag{3.204}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{22} dr dz + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} d\theta dr dz - \sigma_{22} dr dz + \sigma_{21} \frac{d\theta}{2} dr dz + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \theta} \frac{(d\theta)^2}{2} dr dz + \sigma_{21} \frac{d\theta}{2} dr dz \\
& + \sigma_{32} \left(r + \frac{dr}{2}\right) d\theta dr + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} dz \left(r + \frac{dr}{2}\right) d\theta dr - \sigma_{32} \left(r + \frac{dr}{2}\right) d\theta dr + \sigma_{12} (r + dr) d\theta dz + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r} dr (r + dr) d\theta dz \\
& - \sigma_{12} r d\theta dr + b_\theta r dr d\theta dz = 0
\end{aligned} \tag{3.205}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{22} dr dz + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} dr d\theta dz - \sigma_{22} dr dz + \sigma_{21} \frac{d\theta}{2} dr dz + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial \theta} \frac{(d\theta)^2}{2} dr dz + \sigma_{21} \frac{d\theta}{2} dr dz \\
& + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} r dr d\theta dz + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} \frac{(dr)^2}{2} d\theta dz + \sigma_{12} r d\theta dz + \sigma_{12} dr d\theta dz + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r} r dr d\theta dz + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r} (dr)^2 d\theta dz \\
& - \sigma_{12} r d\theta dz + b_\theta r dr d\theta dz = 0
\end{aligned} \tag{3.205}$$

yine ikinci dereceden terimler ihmal edilir ve hesaplara devam edilirse

$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} dr d\theta dz + 2\sigma_{21} \frac{d\theta}{2} dr dz + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} r dr d\theta dz + \sigma_{12} r d\theta dz \tag{3.206}$$

$$+ \sigma_{12} dr d\theta dz + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r} r dr d\theta dz - \sigma_{12} r d\theta dr + b_\theta r dr d\theta dz = 0 \tag{3.207}$$

ve gerilme tensörünün simetri özelliğinden ötürü $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ olduğundan

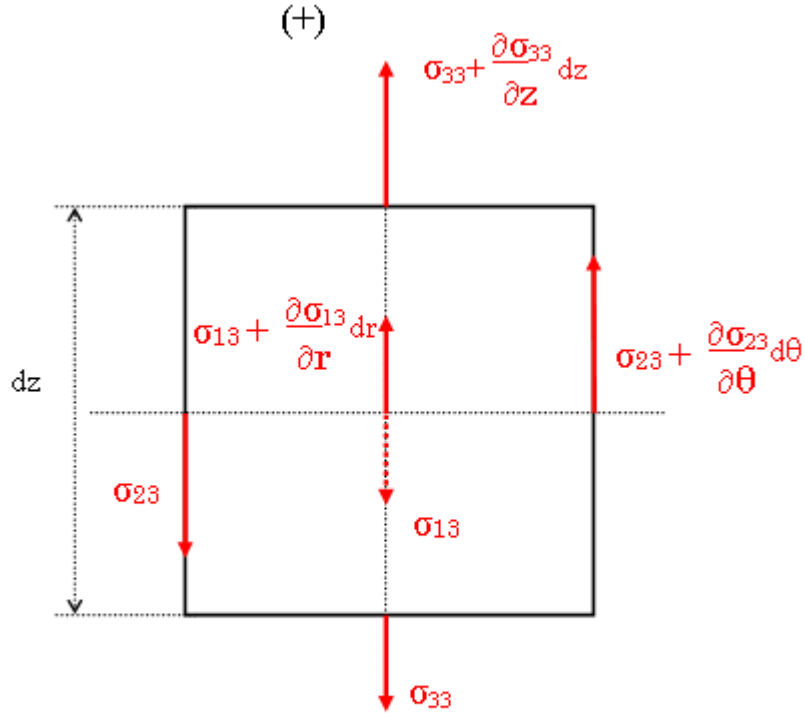
$$\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} dr d\theta dz + 2\sigma_{12} d\theta dr dz + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} r dr d\theta dz + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r} r dr d\theta dz + b_{\theta} r dr d\theta dz = 0 \quad (3.208)$$

Ve yine her iki tarafı da $b_r r dr d\theta dz$ ye bölersek

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial r} + b_{\theta} = 0 \quad (3.209)$$

Aynı şekilde dz eksenini için aşağıdaki Şekil 3.12’de yeralan veriler doğrultusunda $\Sigma \mathbf{f}_z = 0$ yazmak gerekirse

3.8.3 Koordinatlarda denge denklemi dz eksenini bileşenleri için $\Sigma \mathbf{f}_z = 0$



Şekil 3.12 Silindirik koordinatlarda denge denklemi dz eksenini bileşenleri için $\Sigma \mathbf{f}_z = 0$

$$\begin{aligned} & \left(\sigma_{32} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} dz \right) \left(r + \frac{dr}{2} \right) d\theta dr - \sigma_{32} \left(r + \frac{dr}{2} \right) d\theta dr + \left(\sigma_{23} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz - \sigma_{23} dr dz \\ & + \left(\sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \sigma_{13} r d\theta dz + b_{\theta} r dr d\theta dz = 0 \end{aligned} \quad (3.210)$$

$$\sigma_{32} \left(r + \frac{dr}{2} \right) d\theta dr + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} \left(r + \frac{dr}{2} \right) dz d\theta dr - \sigma_{32} \left(r + \frac{dr}{2} \right) d\theta dr + \sigma_{23} dr dz + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \theta} d\theta dr dz - \sigma_{23} dr dz$$

$$+ \sigma_{13} r d\theta dz + \sigma_{13} dr d\theta dz + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial r} r dr d\theta dz + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial r} (dr)^2 d\theta dz - \sigma_{13} r d\theta dz + b_z r dr d\theta dz = 0 \quad (3.211)$$

olur ki buradan

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} r dr d\theta dz + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} \frac{(dr)^2}{2} d\theta dz + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \theta} d\theta dr dz \\ & + \sigma_{13} dr d\theta dz + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial r} r dr d\theta dz + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial r} (dr)^2 d\theta dz + b_z r dr d\theta dz = 0 \end{aligned} \quad (3.212)$$

yine ikinci dereceden terimler ihmal edilirse

$$\frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} r dr d\theta dz + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \theta} d\theta dr dz + \sigma_{13} dr d\theta dz + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial r} r dr d\theta dz + b_z r dr d\theta dz = 0 \quad (3.213)$$

Ve yine her iki tarafı da $b_z r dr d\theta dz$ ye bölersek

$$\frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial r} + b_z = 0 \quad (3.214)$$

elde edilir.

3.9 Cauchy Gerilme Tensörü, Malzemeye Bağlı (Material Coordinates) ve Anlık Konumlara Bağlı Koordinatlar (Spatial Coordinates), 1. ve 2. Piola Kirchoff Gerilmeleri , Doğrusal ve Doğrusal Olmayan Kuramlardaki İlişkileri

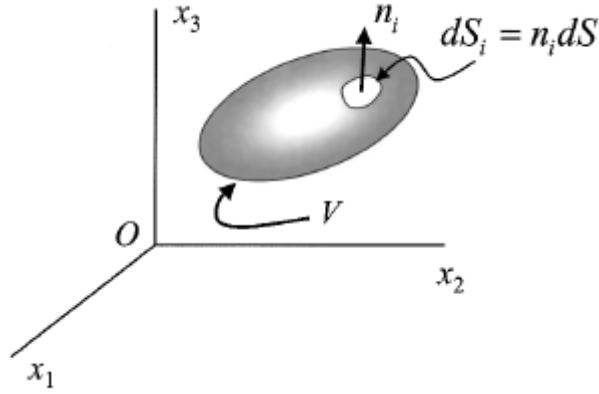
Polimer mekaniği gibi doğrusal olmayan elastisite kavramına dayanan bir yaklaşıma girmeden önce, başlıkta geçen kavramları, süreğen sistemler dinamiğinin temelini oluşturduklarından ötürü, incelemek faydalı olacaktır. [8]

Bahsi geçen kavramların notasyonunun kavranabilmesi için gerekli kimi hususlar aşağıda sırasıyla verilmiştir.

Permütasyon Sembolü

$$\varepsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 1 & \text{eger } i, j, k \text{ } 1,2,3,1,2,3 \\ -1 & \text{eger } i, j, k \text{ } 3,2,1,3,2,1 \\ 0 & \text{eger } i, j, k \text{ keyfi} \end{cases} \quad (3.215)$$

Gauss ve Stokes Teoremleri



Şekil 3.13 V hacmi , sonsuz küçük dS_i yüzeyi ve yüzey normal birim vektörü n_i

Fiziksel uzayın sonlu bir bölümünde tanımlanmış, gereken türevlerinin hepsinde sürekli bir tensör alanı (field) $T_{i,j,...k}$ olsun, ilgili hacim V ve bu hacmi sınırlayan yüzey alanı S olmakla birlikte Şekil 12'deki verilerin ışığında aşağıda yeralan eşitlik Gauss Diverjans Teoremi olarak bilinir. [8]

$$\int_S T_{ij...k} n_q dS = \int_V T_{ij...k,q} dV \quad (3.216)$$

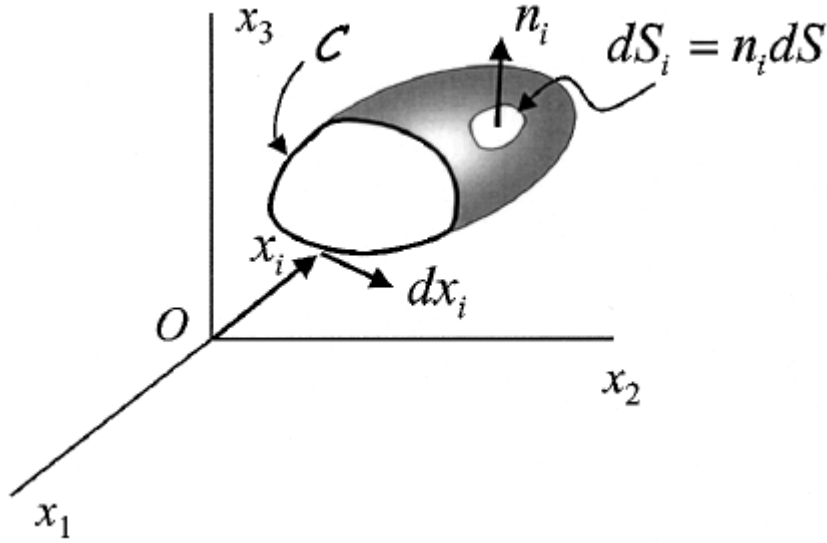
skaler ve vektörel alanlar için bu teoremin kimi önemli sonuçları aşağıda hem indis gösterimi hem de sembollerle ifade edilmiş haliyle verilmiştir. [8]

$$\int_S \lambda n_q dS = \int_V \lambda_{,q} dV \quad \text{or} \quad \int_S \lambda \hat{n} dS = \int_V \mathbf{grad} \lambda dV$$

$$\int_S v_q n_q dS = \int_V v_{q,q} dV \quad \text{or} \quad \int_S \mathbf{v} \cdot \hat{n} dS = \int_V \mathbf{div} \mathbf{v} dV$$

$$\int_S \epsilon_{ijk} n_j v_k dS = \int_V \epsilon_{ijk} v_{k,j} dV \quad \text{or} \quad \int_S \hat{n} \times \mathbf{v} dS = \int_V \mathbf{curl} \mathbf{v} dV \quad (3.217)$$

Gauss Diverjans Teoremi kapalı bir hacim üzerinden integrali tanımlarken , Stokes teoremiyse açık bir alan üzerinden integral tanımlar. Ayrıntılarına geçmeden önce aşağıda yeralan Şekil 13.14'ü incelemek gerekirse



Şekil 3.14 Kısmi bir hacim için, hacmi kısmen saran yüzey S , sonsuz küçük yüzey alanı parçası dS_i , yüzey normal birim vektörü n_i , hacmin kesidi alınan kısımdaki saran yüzey S 'in kenarını teşkil eden hat C ve C 'yi oluşturan noktaların yarıçap vektörü \mathbf{x}_i ve C boyunca teğetsel birim vektör $d\mathbf{x}_i$

Stokes C hattı üzerinden açık bir alan için integral tanımlamaktadır, n_i vektörü S yüzeyinden dışarı doğru ve S ile C üzerinde tanımla herhangi bir vektör alanı v_i için aşağıdaki eşitlikler Stokes Teoremi olarak bilinir.

$$\int_S \epsilon_{ijk} n_i v_{k,j} dS = \int_C v_k dx_k \quad (3.218)$$

$$\int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) dS = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \quad (3.219)$$

eğer tanımlanan v_i vektör alanı hız ise, inetgralin ikinci kısmı döngüsellik belirtir ve

\oint ile ifade edilir. [8]

3.9.1 Cauchy Gerilme Tensörü

Daha önce incelenen gerilme tensörü , Cauchy Gerilme Tensörü'nün özel bir hali olup , aslen Cauchy Green Gerilme Tensörünün nasıl çıkartıldığı aşağıda incelenecektir; ancak buna girmeden önce hemen aşağıda verilmiş notasyon ilerleyen satırlarda değinilecek formüllerin özet gösterimleri için gereklidir.

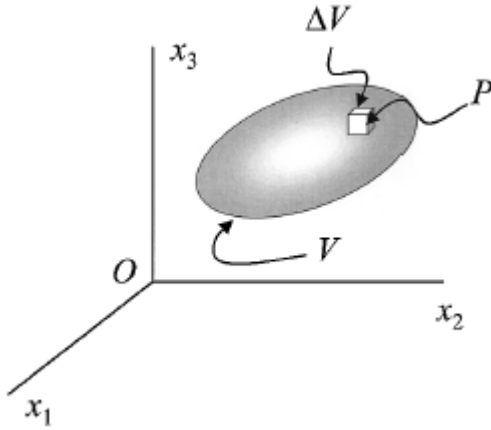
$$\nabla \phi = \mathbf{grad} \phi = \partial_i \phi = \phi_{,i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad \nabla \mathbf{v} = \partial_j v_i = v_{i,j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = v_{i,i} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (3.220)$$

$$\mathbf{curl} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \varepsilon_{ijk} \partial_j v_i = \varepsilon_{ijk} v_{i,j} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad T_{ij,k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} \quad (3.221)$$

diğer yandan b_i birim kütle başına kuvvet $[(\text{kg m/s}^2)/\text{kg} = \text{m/s}^2]$ ve p_i birim hacim başına kuvvet $[(\text{kg m/s}^2)/\text{m}^3 = \text{kg}/\text{m}^2\text{s}^2]$, f_i birim hacim başına kuvvet $[(\text{kg m/s}^2)/\text{m}^2 = \text{kg}/\text{ms}^2]$, B bir katı cisim, hacmi V ve S alanıyla çevrelenerek uzaydaki bir R_0 bölgesinde yer kaplasın, üzerindeki çok küçük bir hacim ΔV ve sahip olduğu kütle Δm olmakla beraber bu ΔV üzerinde \mathbf{P} gibi bir nokta olduğunu kabul edersek, ataletin kütleyle sahip bir cismin niceliği olduğu ve cismin sahip olduğu harekette yapılmak istenen değişime karşı koyma eğilimi biçiminde fiziksel anlam bulacağını da dikkate alarak ortalama yoğunluk $\rho_{\text{ave}} [\text{kg}/\text{m}^3]$ 'u yazmak gerekirse

$$\rho_{\text{ave}} = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (3.222)$$

ve şekil 3.15'de görülebileceği gibi



Şekil 3.15 V havmindeki ΔV gibi çok küçük hacme sahip bir kesidin üzerinde yer alan P noktası

Tüm ΔV hacmi P noktasına dek küçülürken yoğunluk ρ

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (3.223)$$

olarak yazılır ve başlangıçta belirtilen niceliklerin birimleri de gözönünde bulundurularak aşağıdaki eşitlikler yazılır.

$$\rho b_i = p_i \quad (3.224)$$

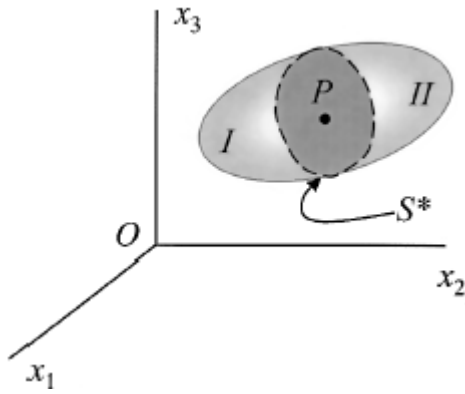
$$\rho \mathbf{b} = \mathbf{p} \quad (3.225)$$

elbette ki yoğunluk genelde yere ve zamana bağlı skaler bir fonksüyondur ve

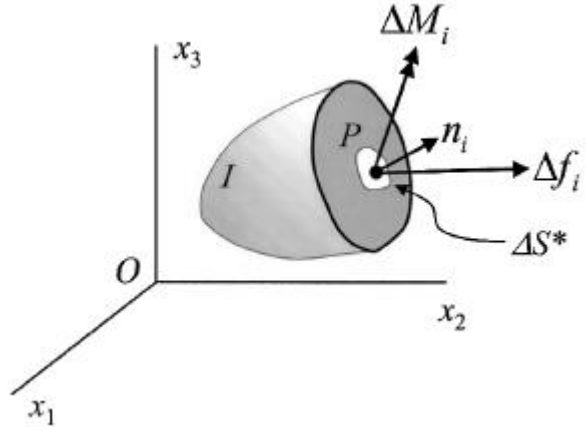
$$\rho = \rho(x_i, t) \quad (3.227)$$

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t) \quad (3.228)$$

şeklinde ifade bulur. Şimdi de Şekil 3.15’de yeralan niceliklere ek olarak P noktasını üzerinde barındıracak şekilde V hacmini iki parçaya ayıran bir S^* yüzeyi olduğunu kabul edelim (bkz Şekil 3.16 ve 3.17)



Şekil 3.16 S^* tarafından kesilen süregelen hacim V



Şekil 3.17 Yüzey normal birim vektörü \mathbf{n}_i olan ΔS^* yüzeyindeki P noktasına etkiyen moment $\Delta \mathbf{M}_i$ ve birim yüzey başına kuvvet $\Delta \mathbf{f}_i$

Şekildeki veriler ışığında Cauchy Gerilme Prensibi, ΔS^* yüzeyi P noktasına küçülürken aşağıdaki ifadeleri öngörmektedir.

$$\lim_{\Delta S^* \rightarrow 0} \frac{\Delta f_i}{\Delta S^*} = \frac{df_i}{dS^*} = t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} \quad (3.229)$$

$$\lim_{\Delta S^* \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{M}_i}{\Delta S^*} = 0 \quad (3.230)$$

İlk ifadedeki $df_i/dS^* = t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}$ niceliği gerilme vektörü olarak adlandırılır ve P noktasındaki gerilme durumunun tayini için kullanılır. Üzerindeki $(\hat{\mathbf{n}})$ sembolü , yardımcı vektörü olan \mathbf{n}_i ile fiziksel olarak anlamlandırıldığından eklenmiştir.

Kesme yüzeyi dahilinde, I. kısmın II. ye uyguladığı kuvvetlerle, II. kısmın I. ye uyguladığı kuvvetlerin birbirlerini sıfırladığını, Newton'un 3. kanununu olan etki-tepki prensibini gözönünde bulundurarak kabul edersek, ve Newton'un 2. kanunu olan doğrusal momentum değişimi doğrultusunda (ileride de değinileceği üzere bir cismin doğrusal momentum değişiminin zamana oranı o cisme etkiyen bileşke kuvvete eşittir.) , v_i 'nin hız alanı (velocity field) olduğunu hatırlatarak, aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz. [8]

$$\begin{aligned}\int_{S_I} t_i^{(\hat{n})} dS + \int_{V_I} \rho b_i dV &= \frac{d}{dt} \int_{V_I} \rho v_i dV \\ \int_{S_{II}} t_i^{(\hat{n})} dS + \int_{V_{II}} \rho b_i dV &= \frac{d}{dt} \int_{V_{II}} \rho v_i dV\end{aligned}\quad (3.231)$$

ki buradaki ifadelerde yer alan indislerden I ve II ilgili hacim parçalarını ifade etmektedir. S_I ve S_{II} deki birim normal vektörlerinin, birbirlerinin ters işaretlisi olduklarını göz önünde bulundurursak

$$\int_{S^*} [t_i^{(\hat{n})} + t_i^{(-\hat{n})}] dS = 0 \quad (3.232)$$

S_I ve S_{II} nin her ikisi de S^* üzerinden integrali olduğundan üzerinde P noktasını taşıyan her nevi kesme yüzeyiyle ayırma işlemi için bu son ifade aşağıdaki halini alır.

$$t_i^{(\hat{n})} = -t_i^{(-\hat{n})} \quad (3.233)$$

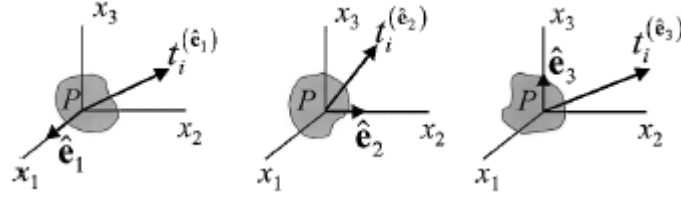
Gerilme vektörünün kartezyen koordinatlarda \hat{e}_i ($i = 1,2,3$) birim vektörleriyle ifadesi aşağıdaki verilen eşitliklerdeki gibi olup

$$\mathbf{t}^{(\hat{e}_1)} = t_1^{(\hat{e}_1)} \hat{e}_1 + t_2^{(\hat{e}_1)} \hat{e}_2 + t_3^{(\hat{e}_1)} \hat{e}_3 \quad (3.234)$$

$$\mathbf{t}^{(\hat{e}_2)} = t_1^{(\hat{e}_2)} \hat{e}_1 + t_2^{(\hat{e}_2)} \hat{e}_2 + t_3^{(\hat{e}_2)} \hat{e}_3 \quad (3.235)$$

$$\mathbf{t}^{(\hat{e}_3)} = t_1^{(\hat{e}_3)} \hat{e}_1 + t_2^{(\hat{e}_3)} \hat{e}_2 + t_3^{(\hat{e}_3)} \hat{e}_3 \quad (3.236)$$

olup fiziksel anlamını pekiştirmek adına aşağıdaki şekilde görsel olarak ifade edilmiştir. [8]



Şekil 3.18 Bileşke gerilme vektörünün her üç koordinatına ait birim vektörlerle ayrı ayrı gösterimi

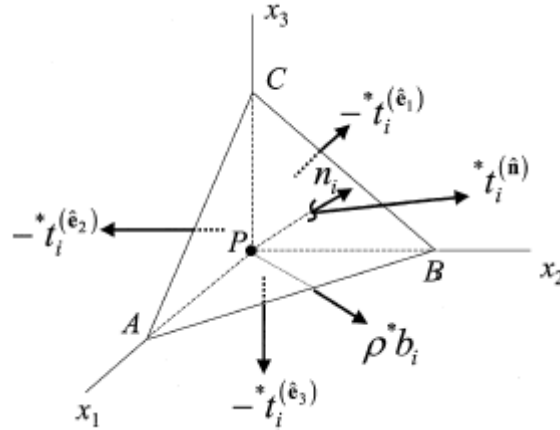
bu bağlamda yukarıdaki üç ifadeyi özet bir gösterimle ifade etmek istersek

$$\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{e}}_i)} = t_i^{(\hat{\mathbf{e}}_i)} \hat{\mathbf{e}}_i \quad (i=1,2,3) \quad (3.237)$$

olur ve $\hat{\mathbf{n}} = n_i \hat{\mathbf{e}}_i$, $dS_i = dS \cos(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{e}}_i)$, $(i=1,2,3)$ olduğu dikkate alınır

$$t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} dS - t_i^{(\hat{\mathbf{e}}_1)} dS_1 - t_i^{(\hat{\mathbf{e}}_2)} dS_2 - t_i^{(\hat{\mathbf{e}}_3)} dS_3 + \rho b_i dV = 0 \quad (3.238)$$

elde edilir ki bunu daha önce değinilen gerilme tetrahedronunun üzerinde şekil 3.19 yardımıyla daha kapsamlı bir biçimde gösterilecek olursa



Şekil 3.19 Gerilme Tetrahedronu, Cauchy Gerilme Prensibi doğrultusunda ayrıntılı gösterim

Bu bağlamda $t_i^{(-\hat{\mathbf{n}})} = -t_i^{(\hat{\mathbf{n}})}$ olduğunu gözönünde bulundurarak bir önceki ifade özet gösterimiyle aşağıdaki halini alır.

$$t_i^{(\hat{\mathbf{n}})} dS - t_i^{(\hat{\mathbf{e}}_1)} dS_1 - t_i^{(\hat{\mathbf{e}}_2)} dS_2 - t_i^{(\hat{\mathbf{e}}_3)} dS_3 + \rho b_i dV = 0 \quad (3.239)$$

Diğer yandan $t_i^{(\hat{\mathbf{e}}_j)}$ vektörlerinin toplama sürecine dahil olmasına izin verir ve h , P noktasından ABC yüzeyine ine dikmenin büyüklüğü olmakla beraber (yani yükseklik), tetrahedronun hacminin $dV = \frac{1}{3} h dS$ olduğunu dikkate alarak ifadeyi aşağıdaki gibi düzenleyebiliriz.

$${}^*t_i^{(\hat{n})} = {}^*t_i^{(\hat{e}_j)} n_j - \frac{1}{3} \rho {}^*b_i h \quad (3.240)$$

ve $h \rightarrow 0$ a giderken tüm tetrahedron P ye küçülmektedir, dolayısıyla

$$t_i^{(\hat{n})} = t_i^{(\hat{e}_j)} n_j \quad (3.241)$$

elde edilir ve tanımlamak gerekirse

$$\sigma_{ji} \equiv t_i^{(\hat{e}_j)} \quad (3.242)$$

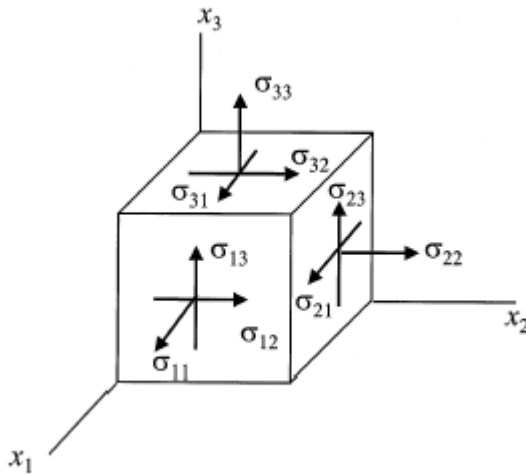
atamasının ardından ifade nihai gösterimiyle

$$t_i^{(\hat{n})} = \sigma_{ji} n_j \quad \text{ya da} \quad \mathbf{t}^{(\hat{n})} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (3.243)$$

halini alır ki ifadenin adı Cauchy Gerilmesidir ki ifadenin bileşenleri 2. dereceden bir tensör tanımlar ve matris gösterimiyle yazılmak istendiğinde [8]

$$\begin{bmatrix} t_1^{(\hat{n})} & t_2^{(\hat{n})} & t_3^{(\hat{n})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.244)$$

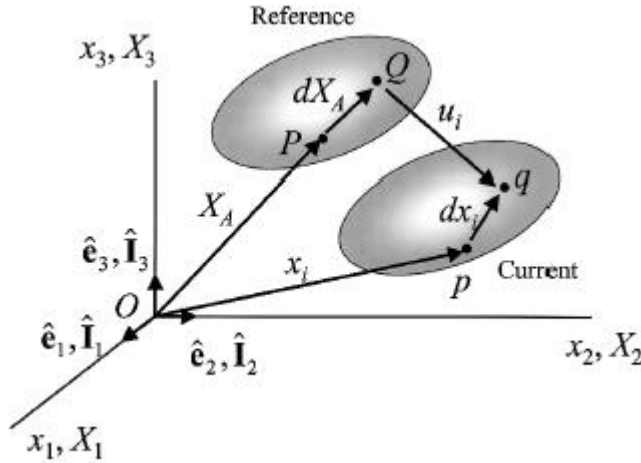
şeklinde ifade bulur ki, daha önce belirtilen S_I ve S_{II} yüzeylerinin çevrelediği V_I ve V_{II} hacimlerinin , birbirini taban alanlarından öpen iki tetrahedron olarak düşünülürse aşağıdaki şekil 3.19’da yer alan gösterimiyle



Şekil 3.20 Gerilme Tensörü bileşenleri , artı yönlerindeki gösterimleriyle

3.9.2 Ana Cismin Malzemeye Bağlı Kordinatları (Material Coordinates), Cismi Oluşturan Taneciklerin Anlık Konumlara Bağlı Kordinatları (Spatial Coordinates)

Bu kavramın kuramsal altyapısını incelemeden önce ne demek istediğini canlandırabilmek adına kauçuk bir denekten örnek verelim. Tek eksenli bir çekme deneyinde kauçuk bir papyon denek boyca yer değiştirmeye maruz kalsın, deneğe sabitlenmiş ekstansiyometrenin 2000N altında boyca kaç mm yer değiştireceği kauçuğun reçetesi ve pişme koşullarına bağlıdır, oysa ekstansiyometre kesin olarak cihazın çekme eksenı doğrultusunda yer değiştiriyor ve toplam 2mm mesafe katediyorken, polimer uçlarının hangi doğrultu ve yönlerde yer değiştirdiği ve ne kadar mesafe kaydettiği, polimer başlangıç ve sonlarının ‘anlık konumları’ na göre belirlenebilir. Kauçuk denekten bağımsız olarak, yine belirli bir hacimdeki cisim biçim değiştirsin, cismi temsil eden P noktasının ekstansiyometre gibi 2000N erişildiğinde, çekme eksenı doğrultusunda 2mm daha yukarıda olacağı kesindir (diyelim p noktasında) , oysa cismin içindeki bir başka nokta olan Q noktası 0.2 s , 0.4s , 0.6s anlarında hangi doğrultu yön ve şiddette yer değiştirmeler sergileyecek ve 2000N’a erişildiği anda hangi doğrultu ve yönde, ve hangi nihai şiddette yer değiştirmiş olacak (diyelim q noktasına kadar), bu iki farklı noktaya ait iki farklı davranışın ayrımını gözetin ve gözetmeyen iki temel yaklaşıma geçmeden önce aşağıdaki resmi inceleyelim.



Şekil 3.21 Cismi temsilen, malzemenin elverdiği şekilde yer değiştiren P noktası ve cisimdeki diğer bir nokta Q

Şekilden de anlaşılabileceği büyük harfler malzemeye bağlı yer değiştirmeleri , küçük harflerle anlık konumlara bağlı yerdeğiştirmeleri ifade edecek şekilde

$$\mathbf{X} = X_A \hat{\mathbf{I}}_A \quad (3.245)$$

$$\mathbf{x} = x_i \hat{\mathbf{e}}_i \quad (3.246)$$

yer değiştirme fonksiyonları ve tersleri

$$\mathbf{X} = \Phi(\mathbf{X}) \text{ tersi } \mathbf{X} = \Phi^{-1}(\mathbf{X}) \text{ ve zamana bağlı olarak tersi } \mathbf{X} = \kappa^{-1}(\mathbf{x}, t)$$

$$\mathbf{x} = \kappa(\mathbf{X}, t) = \kappa[\Phi^{-1}(\mathbf{X}), t] = \chi(\mathbf{X}, t) \quad (3.247)$$

$$x_i = \chi_i(X_A, t) \text{ ya da } \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad (3.248)$$

$$x_i = x_i(X_A, t) \text{ ya da } \mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (3.249)$$

$$\text{yalnızca } t=0 \text{ için } \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X} \quad (3.250)$$

Eğer cismi temsil eden (malzemeye bağlı nihai yer değiştirmeyi takip eden) P noktasının yer değiştirme fonksiyonu \mathbf{X}^P ve konum vektörü \mathbf{X}^P olmak üzere

$$\mathbf{x}^P = \chi(\mathbf{X}^P, t) \quad (3.251)$$

diğer yandan bir vektör alanındaki, x y ve z den bakıldığında aynı hat üzerinde gözüken vektörlerin başlangıç noktalarından, ilgili vektör, kendi başlangıç noktasında o eğriye teğet olacak şekilde, geçen eğrilere akım hattı (stream-line) diyecek olursak (stream-line), bu eğrileri vektör başlangıç noktalarından kesecek şekilde ilgili vektörlerden dik geçen hatları da trajektuar olarak tanımlayabiliriz, örneğin dönen bir disk için r'ye bağlı olarak şiddeti artacak şekilde ve sürekli yarığapa dik sıralanmış dönme hızı vektörlerinden oluşan bir vektör alanı olsun, diskle aynı merkezli ve hız vektörleri onlara teğet olacak şekilde vektör başlangıç noktalarından geğerek oluşan çemberler akım hattı, merkezden geçen ve hız vektörlerini başlangıç noktalarından kesen çaplar da trajektuar olmaktadır. Bu bağlamda yukarıdaki ifadenin trajektuarı zamana bağlı yer değiştirmesi olup \mathbf{v}^P hız olarak adlandırılacaktır.

$$\mathbf{v}^P = \frac{d\mathbf{x}^P}{dt} = \dot{\mathbf{x}}^P = \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^P} \quad (3.252)$$

ve ilgili ifade X'lere bağlı yazıldığından, cisimdeki diğer (malzemeye göre hareket etmeyebilen) tüm noktalar için ifadesi de (hız alanı) yine

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (3.253)$$

olmaktadır, benzer şekilde ivme alanı da

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{x}} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} \quad (3.254)$$

kinematik özelliği olan hız \mathbf{v}^P gibi , süreğen mekanikte (katıda da ama daha çok sıvı ve gazlarda) yoğunluk ρ da B gibi bir cismin kinematik bir özelliği olduğu için, ve yine bu ρ başlangıç konumuna ve zamana göre ifad edilebileceğinden

$$\rho = \rho(X_A, t) \quad \text{or} \quad \rho = \rho(\mathbf{X}, t) \quad \text{ve} \quad v_i = v_i(X_A, t) \quad \text{or} \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) \quad (3.255)$$

şeklinde ifade bulur ki bu yukarıdaki ifadeye, zamanın yanı sıra, yer değiştirme olarak sadece başlangıçtaki malzeme esaslı konum vektörüne bağlı olduğu için Langranjyen gösterimi denir, öte yandan

$$\rho = \rho(\mathbf{X}, t) = \rho[\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t] = \rho^*(\mathbf{x}, t) \quad (3.256)$$

biçiminde bir düzenleme yapıldığında ifadenin en sağındaki nicelik ρ zamanın yanı sıra, yine zamana bağlı anlık yerdeğiştirmelerin bir fonksiyonu olarak tanımlanır ki bu gösterim tarzına da Euleryan gösterimi denir. Benzer şekilde hız da

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{v}[\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t] = \mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t) \quad (3.257)$$

biçiminde Euleryan şekilde ifade edilir. Benzer şekilde yer değiştirme alanı \mathbf{u} da

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = u_i \hat{\mathbf{e}}_i = u_A \hat{\mathbf{I}}_A \quad (3.258)$$

bahsi geçen gösterim biçimlerinden sırasıyla Lagranjyen ve Euleryen şekilde ifade edilirse

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad \text{ve} \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \quad (3.259)$$

ve yukarıda elde edilen hız ifadesi aynı zamanda

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d(\mathbf{x} - \mathbf{X})}{dt} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v} \quad (3.260)$$

Malzemeye ait herhangi fiziksel ya da kinematik bir niceliği tanımlayabilecek $P_{ij, \dots}$ (0. dereceden tensör=skaler , 1. dereceden tensör=vektör veya 2. ya da daha yüksek dereceden bir tensör olabileceğinden her durumu kapsayan bir gösterimle $P_{ij, \dots}$) olsun, bu durumda bu $P_{ij, \dots}$ 'yi Lagranjyen ve Euleryen gösterimleriyle ifade etmek gerekirse [8]

$$P_{ij, \dots} = P_{ij, \dots}(\mathbf{X}, t) \quad (3.261)$$

$$P_{ij, \dots} = P_{ij, \dots}(\mathbf{x}, t) \quad (3.262)$$

bu $P_{ij, \dots}$ 'nin d/dt ile göstereceğimiz malzeme türevi, cisme ait noktaların zamana bağlı değişimleri olan herhangi bir niceliği (örneğin yukarıda ele alınan hız ve ivme gibi) temsilen kullanılabilir, bu bağlamda öncelikle Lagranjyen gösterimiyle [8]

$$\frac{d}{dt}[P_{ij, \dots}(\mathbf{X}, t)] = \frac{\partial}{\partial t}[P_{ij, \dots}(\mathbf{X}, t)] \quad (3.263)$$

biçiminde ifade edilir ki $P_{ij} \dots$ 'nin burada bağlı olduğu yer değiştirme X anlık değil , başlangıç konumna göre olduğu için zamana göre türeve girmeyecek ve zamana göre türev, eşitliğin sağ tarafında yapıldığı üzere, doğrudan kısmi türev olarak ifade edilebilecektir. Öte yandan Euleryen gösteriminde

$$\frac{d}{dt}[P_{ij} \dots (\mathbf{x}, t)] = \frac{\partial}{\partial t}[P_{ij} \dots (\mathbf{x}, t)] + \frac{\partial}{\partial x_k}[P_{ij} \dots (\mathbf{x}, t)] \frac{dx_k}{dt} \quad (3.264)$$

olur ki bu durumda ifadedeki $\frac{dx_k}{dt}$ yerine $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$ ya da $v_k = dx_k/dt$ konulacak olursa

$$\frac{d}{dt}[P_{ij} \dots (\mathbf{x}, t)] = \frac{\partial}{\partial t}[P_{ij} \dots (\mathbf{x}, t)] + \frac{\partial}{\partial x_k}[P_{ij} \dots (\mathbf{x}, t)] v_k \quad (3.265)$$

dolayısıyla malzeme türevini , bağdaştığı her nicelik için kullanacağımızda aşağıdaki gösterime başvuracağız.

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \text{ya da} \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (3.266)$$

ve del operatörü bundan böyle aksi belirtilmedikçe sürekli anlık yer değiştirmelere göre kısmi türevi ifade edecektir.

Bunlara ek olarak Şekil 3.21'deki $d\mathbf{X}$ ve $d\mathbf{x}$ için, daha önce değinilen $x_i = \chi_i(\mathbf{X})$ ya da $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X})$ da değerlendirmeye alınarak $d\mathbf{X} = dX_A \hat{\mathbf{I}}_A$ ve şiddeti de karesi olarak $(d\mathbf{X})^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = dX_A dX_A$ bulunur.

Benzer biçimde $d\mathbf{x} = dx_i \hat{\mathbf{e}}_i$ ve şiddeti de karesi olarak $(d\mathbf{x})^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_i dx_i$
 $dx_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial X_A} dX_A = x_{i,A} dX_A$ şeklinde ifadenin sağ tarafındaki özet gösterimiyle birlikte verilmiştir, ki bu ifadedeki $x_{i,A} \equiv F_{iA}$ *deformasyon gradyan tensörü* ya da kısaca *deformasyon gradyanı* olarak anılır, ifadedeki F (uvvetle karıştırılmamalıdır) X konumundaki bölgesel(lokal) biçim değiştirmeyi tanımlar, ki eğer F niceliği açık bir biçimde X 'e bağlıysa homojen değil , X 'den bağımsızsa homojen olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi ifade edilir. $d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$ ya da $d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$ öyle ki \mathbf{F} tersi alınabilir ve $dX_A = X_{A,i} dx_i$ or $d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}$ ve fiziksel anlamı Şekil 31'den takip edilmek üzere aşağıdaki farkların karesi cinsinden ifade edilirse $(d\mathbf{x})^2 - (d\mathbf{X})^2 = dx_i dx_i - dX_A dX_A$ biçiminde yazılır ve Kronecker deltayı kullanarak göstermek gerekirse

$$\begin{aligned}
(dx)^2 - (dX)^2 &= (x_{i,A} dX_A)(x_{i,B} dX_B) - \delta_{AB} dX_A dX_B \\
&= (x_{i,A} x_{i,B} - \delta_{AB}) dX_A dX_B \\
&= (C_{AB} - \delta_{AB}) dX_A dX_B
\end{aligned} \tag{3.267}$$

ki ifadedeki simetrik tensör $C_{AB} = x_{i,A} x_{i,B}$ ya da $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ *Green Biçim Değiştirme Tensörü* diye anılır, diğer yandan aynı ifadede yeralan $(C_{AB} - \delta_{AB})$ de $2E_{AB} = C_{AB} - \delta_{AB}$ ya da $2\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{I}$ biçiminde ifade bulur ve bu ifadedeki E_{AB} *Lagranj sonlu gerinim tensörü* olarak anılır. $(dx)^2 - (dX)^2$ ifadesi anlık konumlara bağlı ifadeyle de yazılmak istenirse

$$\begin{aligned}
(dx)^2 - (dX)^2 &= \delta_{ij} dx_i dx_j - (X_{A,i} dx_i)(X_{A,j} dx_j) \\
&= (\delta_{ij} - X_{A,i} X_{A,j}) dx_i dx_j \\
&= (\delta_{ij} - c_{ij}) dx_i dx_j
\end{aligned} \tag{3.268}$$

ve bu defa ifadedeki simetrik tensör $c_{ij} = X_{A,i} X_{A,j}$ ya da $\mathbf{c} = (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot (\mathbf{F}^{-1})$ *Cauchy Biçim Değiştirme Tensörü* diye anılır, diğer yandan aynı ifadede yeralan $(\delta_{ij} - c_{ij})$ de $2e_{ij} = (\delta_{ij} - c_{ij})$ ya da $2\mathbf{e} = (\mathbf{I} - \mathbf{c})$ biçiminde ifade bulur ve buradaki \mathbf{e} *Euler sonlu gerinim tensörü* diye anılır.

Yukarıda verilen Lagranj ve Euler sonlu gerinim tensörleri biçim değiştirme gradyanlarıyla ifade edimişti, aynı gerinim tensörleri bu defa yer değiştirme gradyanlarıyla ifade edilmek istenirse daha önce değinilen ifadelerden $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}$ için $u_i(X_A) = x_i(X_A) - X_i$ ve $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ içinse $u_A(x_i) = x_A - X_A(x_i)$ biçiminde düzenlenir, ki bu doğrultuda Lagranj sonlu gerinim tensörü $2E_{AB} = x_{i,A} x_{i,B} - \delta_{AB} = (u_{i,A} + \delta_{iA})(u_{i,B} - \delta_{iB}) - \delta_{AB}$ olur ve $2E_{AB} = u_{A,B} + u_{B,A} + u_{i,A} u_{i,B}$ biçiminde sadeleşir, öte yandan Euler sonlu gerinim tensörü ise $2e_{ij} = \delta_{ij} - X_{A,i} X_{A,j} = \delta_{ij} - (\delta_{Ai} - u_{A,i})(\delta_{Aj} - u_{A,j})$ şeklinde ifade bulur ve sadeleşmiş biçimi $2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} - u_{A,i} u_{A,j}$ halini alır, ki değiştirme gradyanlarıyla ifade edilmiş bu Lagranj ve Euler sonlu gerinim tensörlerindeki yer değiştirmeleri çok küçük kabul ederek 2. dereceden türevler ve kareleri ihmal edersek *Sonsuz Küçük Biçim Değiştirmeler Kuramı* olarak anılan yaklaşımla Lagranj ve Euler sonlu gerinim tensörleri aşağıdaki gibi ifade edilir. [8]

$2E_{AB} = u_{A,B} + u_{B,A}$ ve $2e_{ij} = u_{ij} + u_{ji}$ ki yeni halleriyle *Doğrusallaştırılmış Lagranj ve Euler sonlu gerinim tensörleri ismini alırlar*, bu doğrultuda

$$\frac{\partial u_i}{\partial X_A} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_A} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial x_k}{\partial X_A} + \delta_{kA} \right) \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \delta_{kA} \quad (3.269)$$

biçiminde bir kabul yapılabilir ve bunun için aşağıdaki ilişkiden yararlanılmış olur

$$\frac{\partial x_k}{\partial X_A} = \frac{\partial u_k}{\partial X_A} + \delta_{kA} \quad (3.270)$$

sonsuz küçük yer değiştirmeler kuramı doğrultusunda yapılan bu kabüldeki, küçük yerdeğıştirmeler dahilinde yer değıştirme tensörlerinin malzeme koordinatları ya da anlık konumlara bağıli koordinatlar cinsinden ifade edilmesinin bir fark yaratmadığı düşüncesine binayen *eşdeğer görece yerdeğıştirme gradyanını* $u_{i,A}$ veya $u_{i,j}$ in herhangi birisiyle gösterebileceğimizi de kabul dahiline almış oluruz. Dolayısıyla

$2E_{AB} = u_{A,B} + u_{B,A}$ ve $2e_{ij} = u_{ij} + u_{ji}$ ifadeleri bu öngörüyle düzenlendiğinde $E_{AB} \approx e_{ij} \delta_{iA} \delta_{jB}$ biçiminde ifade bulur ki harici bir atama icab ederse yeni sembölü ε_{ij} ile *sonsuz küçük gerinimler tensörü* adı altında aşağıdaki eşitlikle ifade bulur

$$2\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_A} \delta_{Aj} + \frac{\partial u_j}{\partial X_B} \delta_{Bi} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad (3.271)$$

ve $E_{AB}, e_{ij}, \varepsilon_{ij}$ simetrik tensörler olduklarından, daha önce gerilme tensörü için de yapıldığı üzere matris biçiminde göstermek istenirse

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{ij}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_I & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{bmatrix} \quad (3.272)$$

gerinim değışmezlerini de eklemek gerekirse

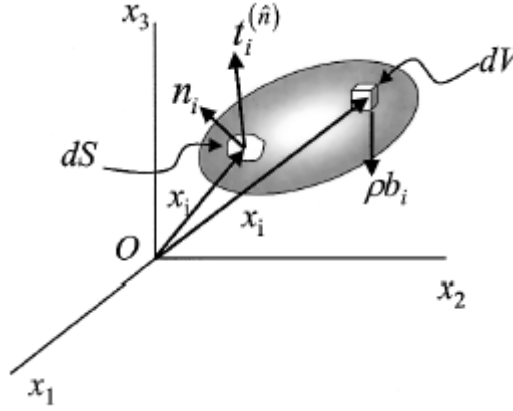
$$I_e = \varepsilon_{II} = \text{tr } \mathbf{e} = \varepsilon_I + \varepsilon_{II} + \varepsilon_{III}$$

$$II_e = \frac{1}{2} (\varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} - \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji}) = \varepsilon_I \varepsilon_{II} + \varepsilon_{II} \varepsilon_{III} + \varepsilon_{III} \varepsilon_I$$

$$III_e = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} \varepsilon_{kk} = \varepsilon_I \varepsilon_{II} \varepsilon_{III} \quad (3.273)$$

3.9.3 1. ve 2. Piola Kirchhoff Gerilme Tensörleri

Kaldığımız yerden adım adım Piola Kirchhoff gerilmesine geçmek üzere, tanıtılan malzemeye ve anlık yerdeğıştirmelere bağıli koordinatlar cinsinden yazılan ifadelerin ışığında doğrusal momentum prensibi ve hareket denklemlerini ele almak gerekirse aşağıda yeralan Şekil 3.22'deki veriler ışığında



Şekil 3. 22 Belirtilen kuvvetlerin etkisinde hareket halindeki cisim

S yüzeyisinin sardığı V hacmindeki cisim $\mathbf{t}_i^{(n)}$ gerilmesinin etkisinde ve yayılı yük ρb_i e maruz kalmakla beraber cisim $v_i = v_i(\mathbf{x}, t)$ hız alanının etkisinde olduğunu düşünelim, bu durumda cismin doğrusal momentumu aşağıdaki gibi ifade edilir.[8]

$$P_i(t) = \int_V \rho v_i dV \quad (3.274)$$

daha önce de değinildiği üzere *doğrusal momentum prensibi* gereği bir cismin doğrusal momentum değişiminin zamana oranı o cisme etkiyen bileşke kuvvete eşittir. Bu kapsamda

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = \int_S t_i^{(n)} dS + \int_V \rho b_i dV \quad (3.275)$$

ve $t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j$ olduğundan σ_{ji} integranı (integrand) yardımıyla yüzey integralini havim integrale çevirerek ve süregelen sistemler mekaniğinde yardımına sık başvuru

$$\frac{d}{dt} \int_V A_{ji}^*(\mathbf{x}, t) \rho dV = \int_V \dot{A}_{ji}^*(\mathbf{x}, t) \rho dV \quad (3.276)$$

denklemini ışığında ilgili ifade yeni halini aşağıdaki biçimiyle alır.

$$\int_V (\rho \dot{v}_i - \sigma_{ji,j} - \rho b_i) dV = 0 \quad (3.277)$$

İfadedeki \dot{v}_i ivme alanı olduğundan ve V keyfi olduğu için integrand düşer, dolayısıyla

$$\sigma_{ji,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i \quad (3.278)$$

elde edilir ki bu eşitlik *Euler biçimindeki bölgesel (lokal) hareket denklemleri* olarak anılır. Eğer hız sıfır ya da sbitse, yani ivme alanı \dot{v}_i sıfıra eşitse ilgili hareket denklemleri *denge denklemlerine* dönüşür ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\sigma_{\bar{p},j} + \rho b_j = 0 \quad (3.279)$$

daha önce $\mathbf{t}^{(\hat{\mathbf{e}}_i)} = t_j^{(\hat{\mathbf{e}}_i)} \hat{\mathbf{e}}_j \quad (i=1,2,3)$ biçiminde ifade edilmiş olan Cauchy Gerilme Tensörü'ndeki ifadede ve ilgili Şekil 17'daki gösterimlere dikkat edilecek olursa , tensör anlık koordinatlarda ifade edilmişti. (bkz. Şekil 31'deki malzemeye $\hat{\mathbf{I}}_j$ ve anlık konumlara bağlı koordinat eksenlerinin birim vektörleri $\hat{\mathbf{e}}_j$) Cauchy Gerilme Tensörü'nün tanımındakine benzer bir biçimde, bu defa herhangi küçük bir yüzeye değil, malzemeye bağlı olarak cismin tamamını temsilen yer değiştiren çok küçük bir yüzey parçası ΔS° e ait birim yüzey normal vektörü $\hat{\mathbf{N}} = N_A \hat{\mathbf{I}}_A$ olmakla birlikte daha önce ifade ettiğimiz Cauchy Gerilme Tensörü'nü bu defa

$$\lim_{\Delta S^\circ \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta S^\circ} = \frac{d\mathbf{f}}{dS^\circ} = \mathbf{p}^{(-\hat{\mathbf{N}})} \quad (3.280)$$

ki bu ifadedeki $\Delta \mathbf{f}$ cisme ΔS° yüzeyinden etkiyen bileşke kuvvettir. Bu ifadeleri doğrusal momentum prensibindeki eşitlikte yerine koyarsak

$$\int_{S^\circ} \mathbf{p}^{(-\hat{\mathbf{N}})}(\mathbf{X}, t) dS^\circ + \int_{V^\circ} \rho_0 \mathbf{b}^\circ(\mathbf{X}, t) dV^\circ = \int_{V^\circ} \rho_0 \mathbf{a}^\circ(\mathbf{X}, t) dV^\circ \quad (3.281)$$

ki ifadedeki S° , V° ve ρ_0 niceliklerindeki 0 indisi, bu niceliklerin malzemeye bağlı olarak cismin tamamını temsilen referans konumuna göre (harekete başlamadan, $t=0$ anında, anlık konumlara bağlı değil anlamında) olduklarını ifade etmek için eklenmiştir. Örneklemek gerekirse

$$a_i(\mathbf{x}, t) = a_i[\chi(\mathbf{X}, t), t] = a_i^\circ(\mathbf{X}, t) \quad (3.282)$$

bir yukarıdaki ifadede d/dt integral içine sokulmuş olup daha önce Cauchy Gerilme Tensörü'nde yapıldığı biçimde S_I ve S_{II} yüzeylerindeki kuvvetlerin birbirlerini sıfırladığı kabulüyle

$$\int_{S^\circ} \left[\mathbf{p}^{(-\hat{\mathbf{N}})} + \mathbf{p}^{(+\hat{\mathbf{N}})} \right] dS^\circ = 0 \quad (3.283)$$

ve yine daha öncekine benzer bir öngörüyle

$$\mathbf{p}^{(+\hat{\mathbf{N}})} = -\mathbf{p}^{(-\hat{\mathbf{N}})} \quad (3.284)$$

ev $\mathbf{p}^{(-\hat{\mathbf{N}})}$ gerilme tensörü malzemeye bağlı olarak cismin tamamını temsilen referans konumundaki kordinat eksenlerindeki birim vektörleriyle tanımlanacak olursa

$$\mathbf{p}^{(-\hat{\mathbf{I}}_A)} = p_i^{(-\hat{\mathbf{I}}_A)} \hat{\mathbf{e}}_i \quad (A = 1,2,3) \quad (3.285)$$

$\hat{\mathbf{N}} = N_A \hat{\mathbf{I}}_A$ olduğunu hatırlayarak tetrahedron \mathbf{P} noktasına küçülürken

$$p_i^{(\hat{\mathbf{N}})} = p_i^{(\hat{\mathbf{I}}_A)} N_A \quad (3.286)$$

olur ve buna binayen $P_{Ai}^\circ \equiv p_i^{(\hat{\mathbf{I}}_A)}$ tanımını sunarsak

$$p_i^{(\hat{\mathbf{N}})} = P_{Ai}^\circ N_A \quad (3.287)$$

elde edilir ki P_{Ai}° ifadesi *I. Piola Kirchoff Gerilme Tensörü*'nün bileşenlerini tanımlar ki bunlar, birim normal vektörü referans konumuna göre olan N_A ay dik bir yüzeye başına etkimekte olan kuvveti tanımlar ve doğrusal momentum prensibi bu defa

$$\int_{S^\circ} P_{Ai}^\circ N_A dS^\circ + \int_{V^\circ} \rho_o b_i^\circ dV^\circ = \int_{V^\circ} \rho_o a_i^\circ dV^\circ \quad (3.288)$$

biçiminde yazılır ve daha önce değinilen diverjans teoremi yardımıyla

$$\int_{V^\circ} (P_{Ai,A}^\circ + \rho_o b_i^\circ - \rho_o a_i^\circ) dV^\circ = 0 \quad (3.289)$$

elde edilir ki, bu eşitlik her nevi keyfi hacim parçası için sağlanmak zorunda olduğu için intergrant sıfırdır, dolayısıyla

$$P_{Ai,A}^\circ + \rho_o b_i^\circ = \rho_o a_i^\circ \quad (3.289)$$

ifadesiyle hareket denklemi elde edilmiş olur ve yine ivme alanını sıfır yapan durumlar için ifade yeni ismini alarak denge denklemi adı altında

$$P_{Ai,A}^\circ + \rho_o b_i^\circ = 0 \quad (3.290)$$

halini alır.

Denge durumu aynı zamanda momentlerin toplamının da sıfır olacağını öngördüğünden orijine göre toplam momenti yazmak istersek

$$\int_{S^\circ} \varepsilon_{ijk} x_j p_k^{(\hat{\mathbf{N}})} dS^\circ + \int_{V^\circ} \varepsilon_{ijk} x_j \rho_o b_k^\circ dV^\circ = 0 \quad (3.291)$$

ve ifadeyi aşağıdaki gibi sadeleştirirsek

$$\int_{V^\circ} \varepsilon_{ijk} \left[(x_j P_{Ak}^\circ)_{,A} + x_j \rho_o b_k^\circ \right] dV^\circ = 0 \quad (3.292)$$

parantesin sağ alt köşesindeki özet gösterimiyle ifade edilmiş olan A ya göre kısmi türevi uygularsak

$$\int_{V^\circ} \varepsilon_{ijk} \left[x_{j,A} P_{Ak}^\circ + x_j (P_{Ak,A}^\circ + \rho_o b_k^\circ) \right] dV^\circ = 0 \quad (3.293)$$

yukarıda verilen $P_{Ai,A}^\circ + \rho_o b_i^\circ = 0$ denge denklemi yardımıyla ifade edilirse

$$\int_{V^0} (\varepsilon_{ijk} x_{j,A} P_{Ak}^0) dV^0 = 0 \quad (3.294)$$

ve daha önce de temellendirildiği gibi, ifade keyfi her nevi hacim parçası için sağlanmak zorunda olduğundan, integrant yok olur ve ifade

$$\varepsilon_{ijk} x_{j,A} P_{Ak}^0 = 0 \quad (3.295)$$

halini alır, burdan yola çıkarak ve daha önce Cauchy Gerilmesi için de kullanılmış bir formulasyonla

$$x_{j,A} P_{Ak}^0 = x_{k,A} P_{Aj}^0 \quad (3.296)$$

elde edilir ve s_{AB} sembolünü sunacak olursak ifade

$$P_{Ai}^0 = x_{i,B} s_{BA} \quad (3.297)$$

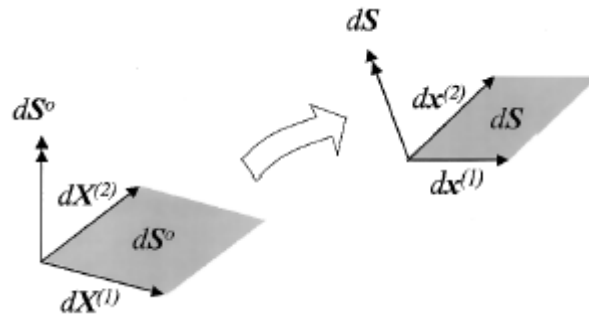
biçiminde yazılabilir ki bu yeni ifadede yeralan $s_{AB} = s_{BA}$, 2. Piola Kirchhoff diğer adıyla *Simetrik Piola Kirchhoff Gerilme Tensörü*'nün bileşenlerini tanımlar. [8] Piola Kirchhoff gerilmeleri Cauchy gerilmeleriyle ilişkilendirilebilir, şöyle ki, df_i , biçim değiştirmiş bir dS yüzeyine etkiyen diferansiyel bir kuvvet olsun, bu bağlamda

$$df_i = \sigma_{ji} n_j dS \quad (3.298)$$

aynı nicelik Piola Kirchhoff gerilme bileşenleriyle ifade edilmek istendiğinde

$$df_i = P_{Ai} N_A dS^0 \quad (3.299)$$

olarak ifade edilir, bu noktada durup Cauchy Gerilmesi'ni veren ifadeler grubuna geri dönerek bir hatırlatma yapmamız icab etmektedir, bunun için aşağıda yeralan Şekil 3.23'ü inceleyecek olursak



Şekil 3.23 Biçim değiştirme öncesi (referans konumunda) ve sonrasında dS yüzeyi

dS^0 nin, $dX_A^{(1)}$ ve $dX_A^{(2)}$ cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilebileceğini görürüz.

$$dS_A^0 = \varepsilon_{ABC} dX_B^{(1)} dX_C^{(2)} \quad (3.300)$$

bu ifade, anlık konumlarıyla ifade edilmek istenirse $\mathbf{x} = \mathbf{x}(X, t)$ nin yardımıyla

$$dS_i = \varepsilon_{ijk} dx_j^{(1)} dx_k^{(2)} = \varepsilon_{ijk} x_{j,B} dX_B^{(1)} x_{k,C} dX_C^{(2)} \quad (3.301)$$

biçiminde yazılabilir, ki her iki taraf x_i nin A ($A=1,2,3$) ya göre kısmi turevi anlamına gelen $x_{i,A}$ ile çarpıldığında

$$x_{i,A} dS_i = \varepsilon_{ijk} x_{i,A} x_{j,B} x_{k,C} dX_B^{(1)} dX_C^{(2)} = \varepsilon_{ijk} F_{iA} F_{jB} F_{kC} dX_B^{(1)} dX_C^{(2)} \quad (3.302)$$

olur öte yandan $\det \mathbf{F} = J$ (Jakobiyan) ifadesini kullanıma sokarak

$$\varepsilon_{ijk} F_{iA} F_{jB} F_{kC} = \varepsilon_{ABC} \det \mathbf{F} = \varepsilon_{ABC} J \quad (3.303)$$

elde edilir ve her iki tarafı $X_{A,q}$ ile çarparsak

$$x_{i,A} X_{A,q} dS_i = \varepsilon_{ABC} J dX_B^{(1)} dX_C^{(2)} X_{A,q} \quad (3.304)$$

elde edilir ki $x_{i,A} X_{A,q} = \delta_{iq}$ olduğundan

$$\delta_{iq} dS_i = dS_q = X_{A,q} J dS_A^o \quad (3.305)$$

ifadesine varılmış olunur. Bu hatırlatma ve formülasyonu takiben kaldığımız yere, yani ilgili diferansiyel kuvvetin Piola Kirchhoff gerilmeleriyle ifade edilmiş hali olan

$$df_i = P_{Ai}^o N_A dS^o \quad (3.306)$$

eşitliğine geri dönecek olursak, hatırlatmada bulunduğumuz formülasyon yardımıyla

$$n_q dS = X_{A,q} J N_A dS^o \quad (3.307)$$

elde edilmiş olur ki ilgili Cauchy gerilme ifadesine başvurarak diferansiyel kuvvet

$$df_i = \sigma_{ji} n_j dS = \sigma_{ji} X_{A,j} J N_A dS^o = P_{Ai}^o N_A dS^o \quad (3.308)$$

biçiminde yazılabilir, ki bu da kendi içinde düzenlenecek olursa

$$(\sigma_{ji} X_{A,j} J - P_{Ai}^o) N_A dS^o = 0 \quad (3.309)$$

olur ve buradan da Piola Kirchhoff ve Cauchy gerilmeleri arasındaki ilişkisi

$$J \sigma_{ji} = P_{Ai}^o x_{j,A} \quad (3.310)$$

biçiminde ifade edilir ki buna Piola Kirchhoff'un kendi ifadesi $P_{Ai}^o = x_{i,B} S_{BA}$ yı ekleyerek

$$J \sigma_{ji} = x_{j,A} x_{i,B} S_{AB} \quad (3.311)$$

elde edilmiş olur ki böylelikle Cauchy gerilmesiyle 2. Piola Kirchhoff gerilmesi arasındaki bağıntı tanımlanmış olur. Şu ana dek incelenen konulardan sonra polimer mekaniğine geçebiliriz.

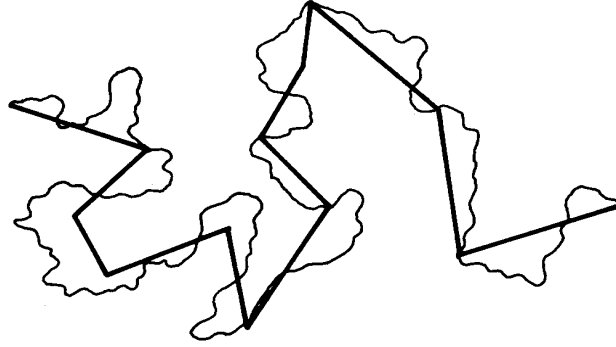
3.10 Gerinim Enerjisi Fonksiyonu

3.10.1 Gerinim Enerji Fonksiyonu, Germe Oranına Göre Türevi, Gerilme ve Polimer Bünye Denklemleri (Constitutive Equations)

Denge denklemlerinden hareket eden analitik yaklaşımın yanı sıra, gerilmeyi yapılan işin (W), germe oranına göre türevi alınarak da hesaplanabilmektedir. (ileride ayrıntısıyla değinileceği üzere [9])

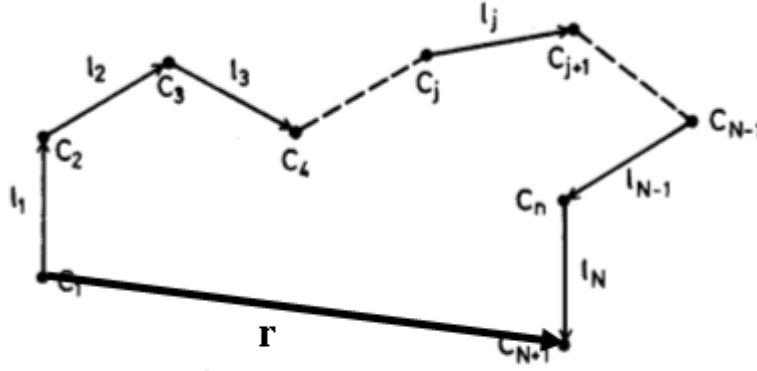
$$\lambda = (1 + \mathcal{E}) = 1 + \frac{L - L_0}{L_0} \quad \sigma = \frac{\partial W}{\partial \lambda} \quad (3.312)$$

Bu germe oranı λ ya bağlı enerji denkleminin polimerler için nasıl türetildiğini temelinden ele almak gerekirse polimer zincirini vektörel niceliklerle temsil etmek için, öncelikle zincirin doğru çakıştırma müsait kısımlarından Şekil 3.24'deki çeşitli gibi doğrular geçirelim. [9]



Şekil 3.24 Polimer zincirinin doğru parçaları çakıştırılması yoluyla temsili

N adet doğru parçası ve tümünün başlangıç ve bitiş noktalarını tanımlamaya yardımcı olmak üzere toplam $N+1$ nokta mevcut olduğundan sistem Şekil 3.25'deki gibi temsil edilebilir. [9]



Şekil 3.25 Polimer zincirinin vektörel temsili

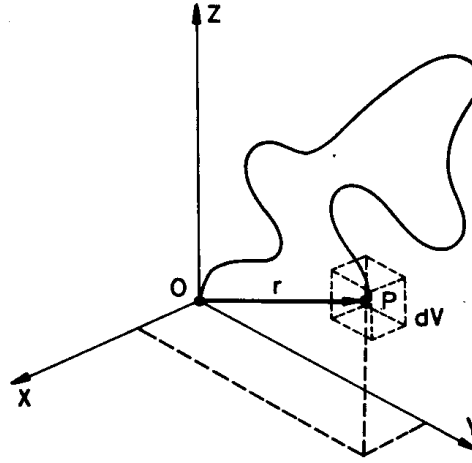
Bir kauçuk cisimde, her bir polimer zincirinin ayrı ayrı vektörel olarak temsilinin tespiti olanaksız olduğundan, nispeten daha erişilebilir bir nicelik olan ‘uçtan uca uzaklık’ kavramını Şekil 3.25’de verilen $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \dots, \mathbf{l}_N$ vektör grubunun toplamı olarak ifade edecek olursak, vektörel toplam \mathbf{r}

$$\mathbf{r} = \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_i \quad (3.313)$$

Buradaki amaç, aynı kauçuk polimerinin, zamana bağlı olarak değişen uçtan uca uzaklığının $\mathbf{r}(t)$ farklı zamanalarda alacağı $\mathbf{r}(t_0), \mathbf{r}(t_1), \mathbf{r}(t_0), \dots, \mathbf{r}(t_{N-1})$ gibi değerlerin ortalamasını bulmaktır. İlk bakışta farklı bir fiziksel anlamlandırma gibi gözükse de, yukarıda farklı zamanlar için farklı nicelikler sergileyen $\mathbf{r}(t)$ ’nin şiddetinin ortalama değerini, aynı t_n anında N farklı polimer zincirinin sahip olduğu uçtan uca uzaklıkların ortalaması olarak düşünebiliriz (ergodik kuram), bu bağlamda oluşturmak istediğimiz matematik formülasyonda hiçbir değişiklik oluşmamaktadır ve bu kuramdan hareket ederek uçtan uca uzaklığın karesi [9]

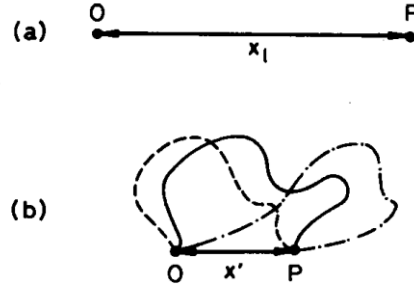
$$r^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{l}_i \sum_{j=1}^N \mathbf{l}_j \quad (3.314)$$

Ortalama değeri yardımıyla şiddetini elde ettiğimiz \mathbf{r} ’nin koordinat sistemindeki bileşenleriyle vektörel gösterimi, polimer zincirini nasıl temsil ettiğiyle beraber aşağıda yer alan Şekil 3.26’da verilmiştir.



Şekil 3.26. Siddeti uçtan uca uzaklık olan r bileşke vektör ve polimer zinciri

Bu bağlamda $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ olarak ifade bulur. Yalnızca bileşke vektör olmasının yanı sıra, bu bileşke vektörün ne tür ve sayıdaki vektörlerin toplamı olduğu polimer zincirinin alabileceği biçimlerin olasılığıdır. Bu olasılıkların matematiksel ifadelerine geçmeden önce aşağıda yeralan Şekil 15'in incelenmesi faydalı olacaktır.



Şekil 3.27(a) ve (b) Bileşke vektörü oluşturan vektör grubunun temsil ettiği polimer zincirinin alabileceği biçimler; (a) tamamıyla doğrusal hal alacak şekilde yatırılmış (gerdirilmemiş) zincirin x bileşeni, (b) herhangi bir konumdaki mevcut olasılıklar.

Bu bilgiler ışığında kolaylıkla anlaşılabilmektedir ki, polimer zinciri açılarak düz bir çizgiye yatırıldığı 3.27(a)'daki halinde alabileceği biçimlerin olasılığı sadece bir , 3.27(b)'deki gibi herhangi bir halde olasılıklar birden fazla ve bu iki yorum doğrultusunda şekil 3.27'deki O ve P noktaları ne kadar yakınlaşırsa zincirin alabileceği biçimlerin olasılığı o kadar fazla ve O ile P'nin çakıştığı ve aradaki mesafe x' nün sıfır olduğu hal için ilgili olasılık en yüksek değerine ulaşmaktadır. Bu

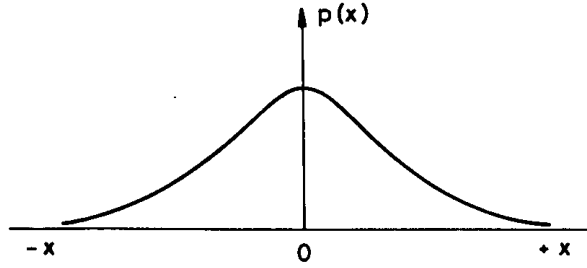
olasılığın matematiksel ifadesi, ρ temsili bir uzaklık olmakla birlikte , Gauss Fonksiyonu olarak adlandırılmakta olup [9]

$$p(x) = \frac{e^{-\left(\frac{x}{\rho}\right)^2}}{\rho\sqrt{\pi}} \quad (3.315)$$

biçimindeki ifadede uçtan uca uzaklığın olasılıklarının çok küçük bir dx uzunluğu için x ve $x+dx$ arasında doğrusal bir değişime sahip kabul edilsin, bu durumda olasılıkların x ve $x+dx$ arasındaki ifadesi

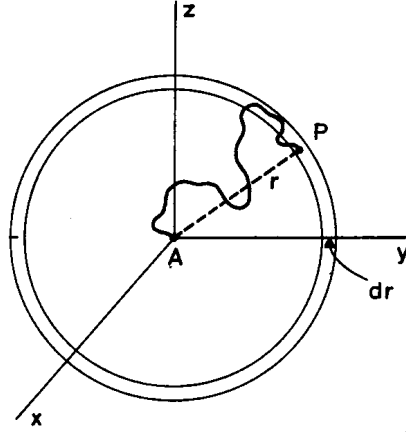
$$p(x)dx = \frac{e^{-\left(\frac{x}{\rho}\right)^2}}{\rho\sqrt{\pi}} dx \quad (3.316)$$

olur ki tanımlanan fiziksel anlamı doğrultusunda, Şekil 3.28'deki grafikten de görülebileceği gibi, $x=0$ da $p(x)$ en yüksek değerini almaktadır.



Şekil 3.28 uçtan uca uzaklık x e göre polimer zincirinin alabileceği biçimlerin olasılık fonksiyonu $P(x)$

Yalnızca x eksenini bileşeni için yaptığımız matematiksel yaklaşımı her üç eksen için de genelleştirmek istersek , olasılığın her üç eksen içinde eşit dağılım gösterdiği ve \mathbf{r} vektörünün yarıçapı r olan dV hacmindeki bir küre içinde gezinebileceği kabulüyle (bkz. Şekil 3.29)



Şekil 3.29. Polimer zincirinin bir ucu orijinde, diğer ucu P iken \mathbf{r} vektörünün alabileceği sonsuz sayıda doğruyla oluşan r yarıçaplı küre

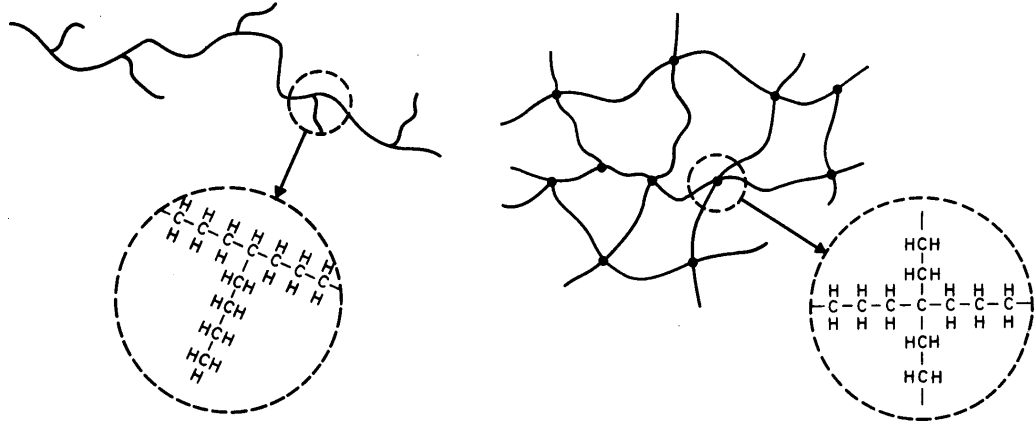
fonksiyonun genelleştirilmiş hali aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$p(x, y, z) dx dy dz = \frac{e^{-\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{\rho^2}\right)}}{(\rho\sqrt{\pi})^3} dx dy dz = \frac{e^{-\left(\frac{r^2}{\rho^2}\right)}}{(\rho\sqrt{\pi})^3} dx dy dz \quad (3.317)$$

Bu ifade ve şekil 3.29'ın ortak değerlendirilmesinden anlaşılabilir ki, \mathbf{r} vektörünün doğrultusu ne olursa olsun şiddeti değişmeyip r kaldıkça, $P(x)$ olasılık fonksiyonun değeri aynı olur. Ortalama uçtan uca uzaklığın olasılıklarının yanısıra, polimerin diğе ucunun orijinden hangi uzaklıkta olacağının (sabit r yarıçaplı bir küre üzerindeki yerini değil) dair skaler değeriine dair olasılıkları tanımlayan fonksiyon ise (3.317) 'den yola çıkarak, dr nin 3.29'daki tanımıyla ve kürenin hacmi için $dV = 4\pi r^2 dr$ konulduğunda aşağıdaki biçimiyle ifade bulur.

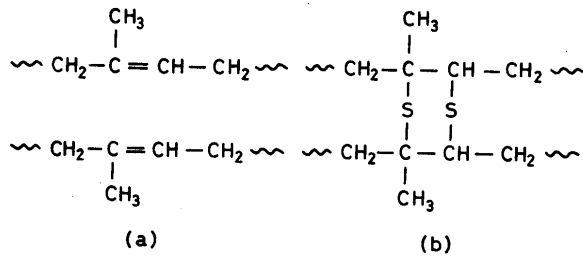
$$p(r) dV = \frac{e^{-\left(\frac{r^2}{\rho^2}\right)}}{(\rho\sqrt{\pi})^3} 4\pi r^2 dr = \frac{4}{\rho^3 \sqrt{\pi}} r^2 e^{-\left(\frac{r^2}{\rho^2}\right)} dr \quad (3.318)$$

Elastomer ağı , polimerlerin, zincir uçlarının hareketini sınırlayan çapraz bağlarla birbirlerine bağlanmasıyla oluşur. Polimer zincirinin bu çapraz bağların oluşumundan önce ve sonraki temsili resimleri şekil 3.30'da bir polimer olan polietilen için örneklendirilmiştir.



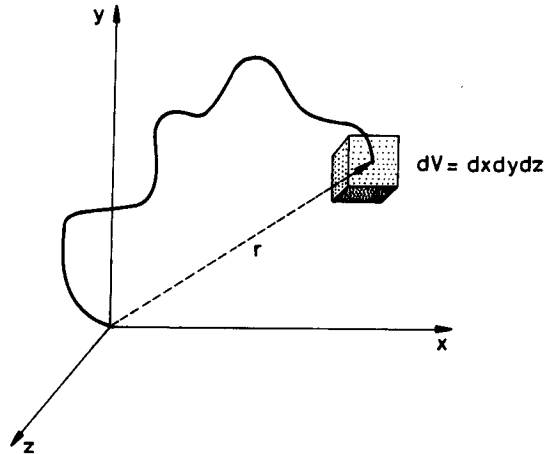
Şekil 3.30. Polietilen , çapraz bağ oluşumu öncesi ve sonrası

Tez kapsamında incelemeye alacağımız doğal kauçuk için çapraz bağların oluşumuna dair öncesi ve sonrası durumlar ise aşağıdaki şekil3.31’de gösterilmiştir.



Şekil 3.31 Doğal kauçuk, çapraz bağ oluşum öncesi (a) ve sonrası (b)

Dolayısıyla elastomer ağına bağlı bir polimer zinciri , aşağıda yeralan şekil 3.32’de görülebileceği üzere, bir ucu orijine tuturulmuş diğer ucunda çok küçük kübik bir hacim yerleştirilecek şekilde temsil edilebilir.



Şekil 3.32 Elastomer ağından ayrılıp bir ucu orijine ötelenmiş polimer zinciri

Boltzmann eşitliği olarak bilinen $S = k_B \ln \Omega$ ifadesi [9], ilgili polimer zincirinin alabileceği biçimlerin olasılığı Ω olmak üzere, Şekil 3.32'deki veriler ve (3.317) eşitliğinden yola çıkarak , birim hacim başına olasılık $p(x, y, z)$ 'nin birim hacimle çarpılmış hali denklemdeki Ω 'nın yerine girecek şekilde yeniden düzenlendiğinde.

$$S = k_B (\ln p(x, y, z) dV) \quad (3.319)$$

(3.318) eşitliğinin sağ tarafını $p(x, y, z)$ 'nin yerine koyarak ve ifadedeki C keyfi bir sabit olmak üzere

$$S = C - k_B \frac{r^2}{\rho^2} = C - k_B \frac{3}{2} \frac{r^2}{\langle r^2 \rangle_0} \quad (3.320)$$

ki ifadedeki $\langle r^2 \rangle_0$ Şekil 3.32'de yeralan gerilmesiz haldeki uçtan uca uzaklığın karesidir. (3.320) ifadesinin yorumu şöyledir. Herhangi bir dış kuvvete maruz kalıp gerilmeye uğradığında r değeri artacak $p(r)$ ifadesinin değeri düşecek , zincirin alabileceği biçimlerin olasılıkları azalacak ve entropi azalacak (matematiksel olarak da r artınca (3.320)'ün toplam değeri azalacaktır) , elastomer buna karşı koyarak eski halini almak isteyecek ve bu yönde bir geri gelme kuvveti uygulayacaktır. Bir polimer ucunu r uzunluğundan $r+dr$ uzunluğuna eriştirmek için harcanacak enerji Helmholtz enerjisindeki değişime eşittir [9] ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\frac{dw}{dr} = \frac{dF}{dr} = -T \frac{dS}{dr} \quad (3.321)$$

İçsel (internal) enerjinin sabit olduğu kabulü ve (3.320) ile (3.321) ifadelerinden yola çıkarak

$$\frac{dw}{dr} = \frac{3kT}{\langle r^2 \rangle_0} r \quad (3.322)$$

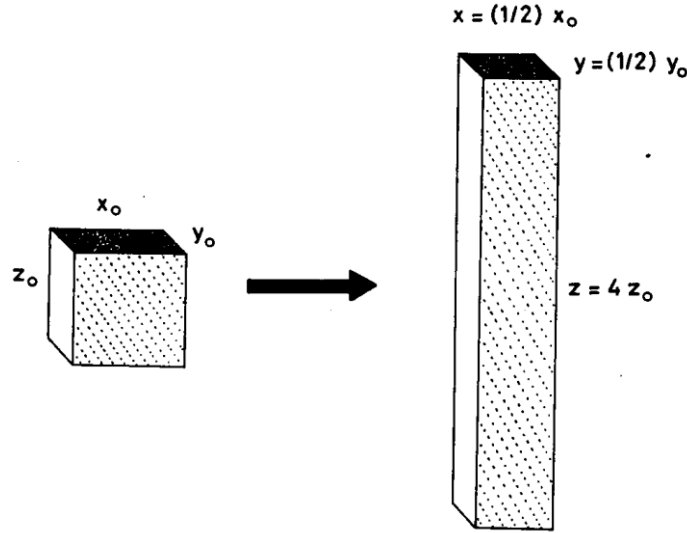
ve uçtan uca mesafeyi r uzunluğunda korumak için uygulanacak kuvvet

$$\mathbf{f} = \frac{3k_B T}{\langle r^2 \rangle_0} r \quad (3.323)$$

Tüm bu verilerin ışığında elastomer elastisitesine girmeden önce yapılacak belli başlı kabuller aşağıda listelenmiştir.

- 1- Elastomer ağı , birim hacim başına N adet zincir içermektedir.
- 2- Ağda herhangi bir kopma olmamış olmalı, yani her zincir her iki ucundan da farklı farklı zincirlere çapraz bağlanmış olmalı
- 3- Zincirler Gauss Formülü'ne uyacak şekilde serbest (öngerilmesiz) konumlarında ağ içinde yer alıyor olmalı.
- 4- Serbest ve biçim değiştirmiş durumlarda zincirin bir ucu ilgili noktada sabitlenmiş kabul edilecek
- 5- Uygulanan kuvvete cevaben, ağda yer alan her zincire ait uçtan uca uzaklığı tanımlayan bileşke vektör aynı oranda değişime uğramalıdır.

İlgili kabullerden 5. maddedeki öngörüü daha iyi örneklemek adına aşağıda yeralan Şekil 3..33'ü incelemek gerekirse

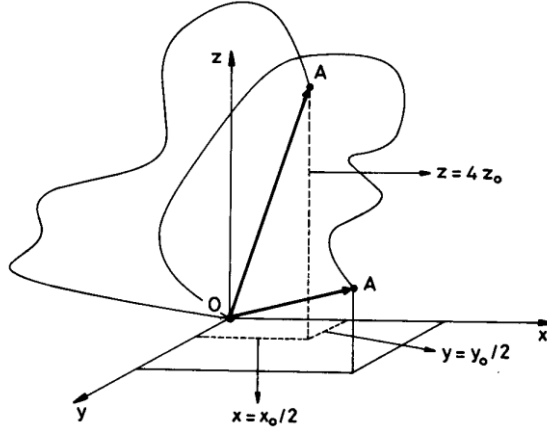


Şekil 3.33 Serbest konumdaki cismin, boyca gerilmesine cevaben, her 3 eksenindeki yer değiştirme oranları

Şekil 3.33'da yeralan cismin tamamı $x = \frac{1}{2} x_0$, $y = \frac{1}{2} y_0$, $z = 4 z_0$ oranında

biçim değiştirdiyse, cisimdeki her bir polimerin uçtan uca uzaklığını tanımlayan vektörün ucunun x, y ve z bileşenleri aynı oranda değişmiş olmalıdır. Makroyapıyı

oluşturan her bir mikroyapıdaki yer değiştirme oranı birbirine eşit ve makroyapıdaki toplam yer değiştirmeyle aynı olduğunun şekilsel ifadesi aşağıdaki Şekil 3.34'de ifade edilmeye çalışılmıştır.



Şekil 3.34 Makroyapıdaki toplam yerdeğiştirmeyle aynı ve herbir zincir için eşit kabul edilen yer değiştirme oranının x,y ve z bileşenlerinin temsili gösterimi

Böylelikle germe oranı $\lambda = \mathcal{E} + 1 = \frac{L - L_0}{L_0} + 1 = \frac{L}{L_0}$ her üç eksen için ifade edildiğinde [1]

$$\lambda_x = \frac{x}{x_0} \quad \lambda_y = \frac{y}{y_0} \quad \lambda_z = \frac{z}{z_0} \quad (3.324)$$

Biçim değiştirme boyunca hacmin sabit kaldığı kabul edildiğinden $\lambda_x \lambda_y \lambda_z = 1$ olur. (3.320) doğrultusunda serbest konumdaki zincirin entropisi [9]

$$S = C - k_B \frac{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)}{\rho^2} \quad (3.325)$$

iken biçim değiştirmiş haldeki entropisi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$S' = C - k_B \frac{(\lambda_x^2 x_0^2 + \lambda_y^2 y_0^2 + \lambda_z^2 z_0^2)}{\rho^2} \quad (3.326)$$

$$\Delta S = S' - S = -k_B \frac{((\lambda_x^2 - 1)x_0^2 + (\lambda_y^2 - 1)y_0^2 + (\lambda_z^2 - 1)z_0^2)}{\rho^2} \quad (3.327)$$

$$\Delta S = \sum_{i=1}^N \Delta S_i = \frac{-k_B}{\rho^2} \left((\lambda_x^2 - 1) \sum_{i=1}^N x_{0i}^2 + (\lambda_y^2 - 1) \sum_{i=1}^N y_{0i}^2 + (\lambda_z^2 - 1) \sum_{i=1}^N z_{0i}^2 \right) \quad (3.328)$$

Tanım gereği

$$\sum_{i=1}^N x_{0i}^2 = N \langle x_0^2 \rangle \quad (3.329)$$

ifadedeki $\langle x_0^2 \rangle$ serbest konumdaki uçtan uca uzaklığı r 'nin karesi olan $\langle r^2 \rangle_0$ ifadesinin x eksenindeki bileşeni olup, sonsuz sayıdaki doğrultuya haiz olabilecek \mathbf{r} vektörünün x_0, y_0, z_0 bileşenlerinin eşit olduğu \mathbf{r} 'yi seçersek

$$\langle x_0^2 \rangle = \langle y_0^2 \rangle = \langle z_0^2 \rangle = \frac{\langle r^2 \rangle_0}{3} \quad (3.330)$$

$$\Delta S = \sum_{i=1}^N \Delta S_i = \frac{-k_B N}{\rho^2} \left(\frac{\langle r^2 \rangle_0}{3} \right) (\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 - 3) \quad (3.331)$$

Diğer yandan $\rho^2 = \frac{2}{3} \langle r^2 \rangle_0$ olduğu dikkate alınarak

$$\Delta S = \frac{-k_B N}{\rho^2} (\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 - 3) \quad (3.331)$$

Izotermal biçim değiştirme kaynaklı hiçbir enerji değişiminin olmadığı kabulünden ötürü $w = -T\Delta S$, ki bu ifadedeki w , deformasyon esnasında yapılan iş, ya da deformasyon sonucu elastik cismin biriktirdiği birim hacim başına düşen serbest enerjidir.

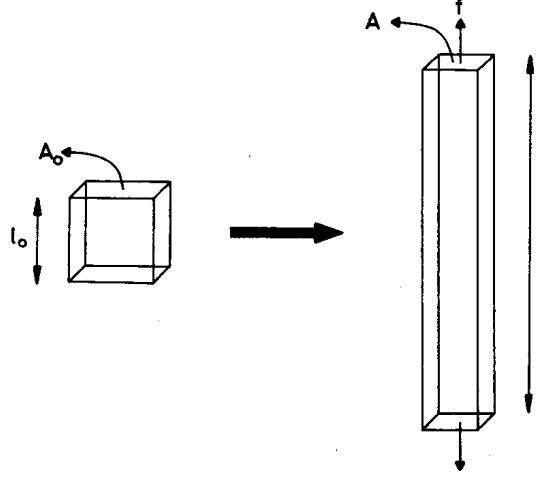
$$w = \frac{1}{2} N k_B T (\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 - 3) \quad (3.332)$$

Bu denklemi aşağıda verilen tek eksenli çekme durumu için düzenlemek gerekirse $\lambda_z = \lambda$ ve $\lambda_x \lambda_y \lambda_z = 1$ ve izotropik malzemelerde tek eksenli gerilme durumu için $\lambda_x = \lambda_y$ ve bu durumda $\lambda_x \lambda_y \lambda = 1$ $\lambda_x = \lambda_y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ [1]

$$w = \frac{1}{2} N k_B T \left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) \quad (3.333)$$

birim hacim başına düşen işi veren bu ifadeden toplam enerjiye geçmek için $W = wV$ olduğu hesaba katılıp ifadeyi hacimle çarpmak yeterlidir.

$$W = \frac{1}{2} N k_B T V \left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) \quad (3.334)$$



Şekil 3.35 Tek eksenli gerilme , z yönünde uygulanan f yükü

Şekil 3.35'deki f kuvveti aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f = \frac{dW}{dl} = \frac{dW}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dl} \quad (3.335)$$

(3.334) , (1.37) denklemlerini birlikte ele alarak

$$f = \frac{V}{l_0} N k_B T \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (3.336)$$

diğer yandan , sıkıştırılamazlık kabulünden (hacim sabitliği) ötürü

$$1 = \frac{V}{V_0} = \frac{V}{A_0 l_0} \quad A_0 = \frac{V}{l_0} \quad (3.337)$$

Ve $\sigma = \frac{f}{A_0}$ olduğundan (3.336) aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\sigma = N k_B T \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (3.338)$$

(3.338)'daki $N k_B T$ çarpanını irdelemek gerekirse Hooke kanunundan başlayarak

$$\sigma = E \varepsilon \quad (3.339)$$

İfadedeki E elastiklik modülü olup, germe oranı λ ise

$$\lambda = 1 + \frac{\Delta L}{L_0} = 1 + \varepsilon \quad (3.340)$$

ve (3.338) daki gerdirme oranlarını içeren terimde yerin konulduğunda

$$\lambda - \lambda^{-2} = 1 + \varepsilon - (1 + \varepsilon)^{-2} \quad (3.341)$$

ifadede yeralan $(1 + \varepsilon)^{-2}$ açılımını yazmak istersek, açılımdaki ikinci ve daha yukarı derceden terimleri ihmal ederek , çok küçük yer değiştirmeler için

$$\lambda - \lambda^{-2} = 1 + \varepsilon - (1 - 2\varepsilon + \dots) = 3\varepsilon \quad (3.342)$$

Dolayısıyla (3.338) denklemini aşağıdaki halini alır.

$$\sigma = N k_B T 3\varepsilon \quad \text{ve} \quad \sigma = E\varepsilon \quad \text{den} \quad E = 3N k_B T \quad (3.343)$$

Sıkıştırılmaz malzemeler için $\nu = 0.5$, Tablo 1.1'deki eşitliklerden $E = 2G(1 + \nu)$ yerine konulduğunda $E = 2G(1 + 0.5) = 3G$ ve (3.343) da yerine konulduğunda

$$E = 3G = 3N k_B T \quad G = N k_B T \quad (3.344)$$

ki ifadedeki G kayma modulu olarak anılır ve (3.338)'da yerine konulduğunda

$$\sigma = G \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (3.345)$$

elde edilir. Bu koşulu sağlayan malzemeler Neo Hookean malzemeler olarak adlandırılırlar.[9] Cisim çok küçük biçim değiştirmelere maruz kalıyorsa A_0 başlangıç kesit alanının biçim değiştirme sonrası kesit alanı A ile üst üste çakıştığı kabul edilebilir. Ancak kuauçuk gibi yüksek germe oranlarına kadar elastik biçim değişimine uğratılabilen cisimler için biçim değiştirme sonrası kesit alanı, başlangıç kesit alanından oldukça farklıdır. Bu durumda (3.345) deki σ ifadesini veren f/A_0 olmuş olduğundan (3.345) deki σ ifadesi mühendislik gerilmesi adını alır ve $\sigma_t = \frac{f}{A}$ diye anılan gerçek gerilmeden bir hayli farklı değerler almaya başlar. Bu durumda

$$\sigma_t = \frac{f}{A} = \frac{l}{V} f \quad (3.346)$$

olur ve bu ifade doğrultusunda (3.338) yeniden düzenlendiğinde

$$\sigma_t = \frac{l}{l_0} N k_B T \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (3.347)$$

bu ifadenin alacağı değerleri (3.345) deki $\sigma = G \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)$ 'ye kabul edebilmek için

$\frac{l}{l_o} N k_B T = N k_B T = G$ yapmakla mümkün olabilirdi ki, böyle bir kabul ancak

$\frac{l}{l_o} N k_B T = G$ 'nin yüksek germe oranları için ($l \gg l_o$) değerinin deneysel verilerle

çakıştırmak amacıyla özellikle düşürülmesinden geçer, ki bu durumda $A_\phi < 1$

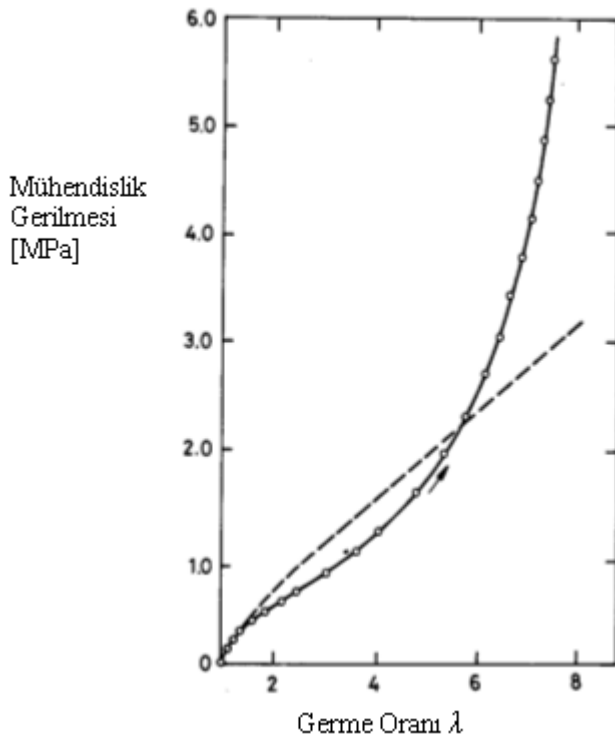
germe oranına bağlı olan deneysel sonuçlar doğrultusunda σ_t nin σ den ayrılma rejimine göre tayin edilen bir katsayı olmakla birlikte hacim sabitliği kabulüyle

sadece (3.347)'nin (3.345)'e bölümüyle elde edilebilir; $A_\phi = \frac{l_o}{l}$ ve (3.338)'un

yüksek gerdirme oranları için yeni hali

$$\sigma = A_\phi N k_B T \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (3.348)$$

olur. Çıkartılan mühendislik gerilmesi denkleminde ait eğrinin yüksek gerdirme oranları için deneysel veriden nasıl ayrıldığı aşağıda yeralan Şekil 3.36'da örneklenmiştir.



Şekil 3.36. Mühendislik Gerinimi /Mühendislik Gerilmesi σ eşitliğine ait eğri (-o-o-o-) ve deneysel sonuç (- - -)

Belirli tek bir katsayıyla (A_ϕ) çarpmanın yanısıra, şekil 3.36'deki ayrılmayı denetim almaya çalışan yaklaşımın yanı sıra yarı ampirik Mooney-Rivlin ifadesini vermek gerekirse

$$[\sigma] = \frac{\sigma}{\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)} = 2C_1 + \frac{2C_2}{\lambda} \quad (3.348)$$

ki bu ifadedeki $[\sigma]$ 'indirgenmiş gerilme' olarak anılır ve C_1 ve C_2 Mooney-Rivlin katsayılarıdır. Bu katsayıların çok küçük yerdeğişirmelere ait deney sonuçlarına göre türetilmişlerini inceleyecek olursak, öyle ki $A_0 \cong A$ ve (3.338) geçerliliğini korumak üzere, indirgenmiş gerilme $[\sigma]$ nın , büyük yer değıştirmelerde, azaltma amaçlı devreye alınma ihtiyacı duyulan ve yine λ 'nin fonksiyonu olan $\frac{2C_2}{\lambda}$

teriminden bağımsız olduğı düşünülürse $C_2 = 0$ alınabilir ve $\sigma = N k_B T \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)$

yerine (3.348) yardımıyla

$$[\sigma] = \frac{\sigma}{\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)} = 2C_1 + \frac{2C_2}{\lambda} = 2C_1 = \frac{N k_B T \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)}{\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)} = N k_B T \quad (3.349)$$

dolayısıyla $2C_1 = N k_B T$ ve $C_2 = 0$ bulunur ki bunun yorumu , malzeme tipi çeşitlilik gösterse bile ,seçilen malzeme için germe oranları küçüldükçe $2C_1 \rightarrow N k_B T = G$ ve $C_2 \rightarrow 0$ olduğudur. Bu yorum ileride, aynı kauçuk denekte, küçük yer değıştirmelerden büyük yer değıştirmelere geçilirken, sonlu elemanlar programı MARC'ın bulduğı Mooney-Rivlin katsayılarının hangi rejimde değıştiğini değıerlendirmede yeniden ele alınacaktır. Öte yandan hacmi sabitliğı öngörüsüne dayanan Mooney-Rivlin ile kauçuğı bir miktar sıkıştırılabilir kabul eden Ogden modelleri arasında kıyasa gitmeden önce Bu Mooney-Rivlin ve Ogden'in MARC'taki kullanımlarında MARC'ın başvurduğı Cauchy Gerilmesi formülasyonunun eldesine gidilecektir. Bunun için öncelikle gerinim enerjisi fonksiyonu W 'yi germe oranlarına bağılı yazabilmemizin nasıl gerçekleştiğı ve daha önce doğrudan giriş yapılan Mooney-Rivlin formülasyonunun mnasıl çıkartıldığına inmemiz gerekmektedir. Bu bağlamda gerinim enerjisi fonksiyonu W , *artık (left)*

biçim değiştirme tensörü [8] diye anılan $B_{ij} = F_{iA}F_{jA}$ nin bir fonksiyonudur ve ilk olarak Mooney(1940) [8] tarafından ortaya atılmış ve bunu takiben Rivlin (1948) [8] tarafından geliştirilmiş olup, anlık izotropik (initially isotropic) malzemenin, gerinim enerjisi fonksiyonunun işlevsel biçimlerine ilişkin kimi belirli simetri kurallarına uyduğu kabulüne dayanır, bu doğrultuda gerinim enerjisi fonksiyonu W yi ,işlevsel biçim olarak, biçim değiştirme tensörünün değişmezleri cinsinden ifade edecek olursak

$$\begin{aligned} W &= W(I_1, I_2, I_3) \\ I_1 &= B_{ii} \\ I_2 &= \frac{1}{2} [B_{ii}B_{jj} - B_{ij}B_{ji}] \\ I_3 &= \varepsilon_{ijk} B_{ii}B_{jj}B_{kk} = \det[B_{ij}] \end{aligned} \quad (3.350)$$

ve değinilen B_{ij} ifadesinin asal eksenleri yukarıdaki değişmezler olarak seçilirse, $x_{iA} \equiv F_{iA}$ olduğunu hatırlatarak, ifadeler germe oranları cinsinden aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2 \\ I_3 &= \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2 \end{aligned} \quad (3.351)$$

ve yine hacim değişmezliği kabulüyle $J = \det[F_{iA}] = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$ olur

Bu spesifik hacim değişmezliği kabulünü temsilen, ancak daha genel bir ifadeyle; ancak bu defa sıfıra eşitlemeyi bu koşulun garantisi olarak atayan matematiksel bir sınırlandırma fonksiyonu ϕ olsun.

$$\phi(F_{iA}) = 0 \quad (3.352)$$

olarak tanımlanmasını takiben aynı ϕ , $C_{AB} = x_{iA}x_{iB}$ ya da $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ veya $x_{iA} \equiv F_{iA}$ ya tekrar değinirsek $C_{AB} = F_{iA}F_{iB}$ olarak formüle edilebilecek Green biçim değiştirme tensörünün fonksiyonu olarak yeniden düzenlenecek olursa (yeni düzenlemenin ayırımına gösterimsel olarak da varmak adına $\bar{\phi}$) [8]

$$\bar{\phi}(C_{AB}) = 0 \quad (3.353)$$

biçiminde tanımlanabilir ki bu ifadenin zamana göre türevi

$$\frac{\partial \phi}{\partial C_{AB}} \dot{C}_{AB} = \frac{\partial \phi}{\partial C_{AB}} (\dot{E}_{iA} E_{iB} + E_{iA} \dot{E}_{iB}) \quad (3.354)$$

olur ki simetrik bir tensörün kısmi türevi de simetrik bir tensör oluşturacağından

$$\frac{\partial \phi}{\partial C_{AB}} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial C_{AB}} + \frac{\partial \phi}{\partial C_{BA}} \right) \quad (3.355)$$

burada \dot{C}_{AB} ilgili ifadelerede devam etmeden önce değinilmesi gereken kimi formülasyonlar aşağıda verilmiştir. Bilindiği üzere süregelen bir sistemin vektör alanı $v_i = v_i(x, t)$ ve *anlık konumlara bağlı hız gradyanı* diye anılan

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (3.356)$$

biçiminde ifade edilir ki bunu simetrik ve çarpık simetrik (skew-symmetric) tensörün toplamı olarak yazmak gerekirse

$$L_{ij} = D_{ij} + W_{ij} \quad (3.357)$$

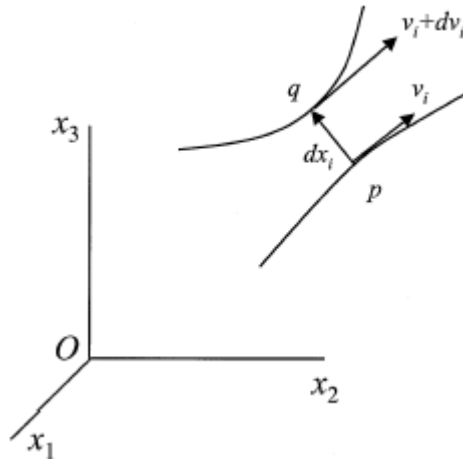
biçiminde ifade edilir ki bu toplamdaki simetrik kısım

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.358)$$

olup biçim değiştirme oranı tensörü adını alır ve çarpık-simetrik kısım da

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.359)$$

olup, spin tensörü diye anılır. Aşağıdaki Şekil 3.37’de yeralan



Şekil 3.37 Komşu iki noktadan p 'nin hızı v_i ve q 'nın $v_i + dv_i$

Verilerin ışığında q'nun p'ye göre bağıl hızı $d\mathbf{v}_i$

$$dv_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \quad \text{ya da} \quad d\mathbf{v} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} \quad (3.360)$$

öte yandan

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial X_A} \frac{\partial X_A}{\partial x_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_A} \right) \frac{\partial X_A}{\partial x_j} \quad (3.361)$$

olduğunu gözönünde bulundurarak sembolik notasyonu

$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$ ve malzeme zaman türeviyle malzeme gradyanı komutatif olduğundan

$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F}$ yazılır ve gerinim tensörü \mathbf{E} yi kullanıma sokarak

$2\mathbf{E} = \mathbf{C} - \mathbf{I} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}$ ki zaman göre türevi alınacak olursa , yukarıda elde edilen ifadeler doğrultusunda

$$\begin{aligned} 2\dot{\mathbf{E}} &= \dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}} = (\mathbf{L} \cdot \mathbf{F})^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{L} \cdot \mathbf{F}) \\ &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{L}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{L}^T + \mathbf{L}) \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot (2\mathbf{D}) \cdot \mathbf{F} \end{aligned} \quad (3.362)$$

ya da $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F}$ biçiminde ifade bulur ki , \dot{C}_{AB} yi bıraktığımız yerden alıp bu son

eşitliği \dot{C}_{AB} için benzer bir formülasyon uygulayıp $\frac{\partial \phi}{\partial C_{AB}} \dot{C}_{AB} = \frac{\partial \phi}{\partial C_{AB}} (\dot{E}_{iA} E_{iB} + E_{iA} \dot{E}_{iB})$

ifadesinde yerine koyarsak $\phi_{ij} D_{ij} = 0$ ifadesini elde ederiz ki buradaki ϕ_{ij} aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\phi_{ij} = \frac{1}{2} E_{iA} \left(\frac{\partial \phi}{\partial C_{AB}} + \frac{\partial \phi}{\partial C_{BA}} \right) E_{jB} \quad (3.363)$$

formülasyona devam etmeden önce $\hat{\sigma}_{ij}$ yi esas(constitutive) bir cevaptan türetildiğini

ve $\bar{\sigma}_{ij}$ nin de içsel bir sınırdan sonuçlandığını kabul edelim. Eklenmiş bu keyfi $\bar{\sigma}_{ij}$

gerilmesinin iş yapmadığını farz edersek $\bar{\sigma}_{ij} D_{ij} = 0$ bulunur ve $\phi_{ij} D_{ij} = 0$ da aynı

sonucu verdiği için $\bar{\sigma}_{ij} = \lambda \phi_{ij}$ yazılır. Sıkıştırılmaz bir malzeme için

$D_{ii} = 0$ olduğundan bu son ifade $\delta_{ij} D_{ij} = 0$ biçiminde ifade edilebilir, bu durumda

$\bar{\sigma}_{ij} = -p \delta_{ij}$ ve gerilme tensörü aşağıdaki halini alır.

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \hat{\sigma}_{ij} \quad (3.364)$$

ve ifadedeki 2. terim Cauchy Gerilmesinin esas cevap (constitutive response)

bileşenleriyle sonuçlanması sayesinde belirlenir [8] ve bu bağlamda

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + F_{iA} \frac{\partial W}{\partial F_{jA}} \quad (3.365)$$

elde edilir. Dikkat edilmesi gereken bir husus daha önce w ile gösterilmiş birim hacim başına gerinim enerjisinin bir yukarıdaki ve bunu takip eden bölümlerde artık W ile gösterilecek olmasıdır. Sıkıştırılamazlık kabulünden $J = 1$ ve $I_3 = 1$ olduğu için

$$W = W(I_1, I_2) \quad (3.366)$$

ve türevi gerilme bileşenlerini verecektir.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + F_{iA} \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial F_{jA}} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial F_{jA}} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial F_{jA}} \right] \quad (3.367)$$

ve daha önce verilen değişmezler bu defa

$$\begin{aligned} I_1 &= F_{iA} F_{iA} \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left[F_{iA} F_{iA} F_{jB} F_{jB} - F_{iA} F_{jA} F_{iB} F_{jB} \right] \\ I_3 &= \det \{ F_{iA} \} \end{aligned} \quad (3.368)$$

bileşenlerinin bağımsız nicelikler olduğunu göz önünde bulundurarak değişmezlerin kısmi türevlerine son halini vermek gerekirse

$$\frac{\partial F_{iA}}{\partial F_{pP}} = \delta_{ip} \delta_{AP} \quad (3.369)$$

olur ve bu ifadeler ışığında Cauchy Gerilme Tensörü bileşenleri aşağıdaki halini alır.

$$\hat{\sigma}_{ij} = I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \delta_{ij} + 2B_{ij} \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] + 2B_{ik} B_{jk} \frac{\partial W}{\partial I_2} \quad (3.370)$$

ve aşağıdaki gibi Cayley-Hamilton teoremini uygulayarak [8]

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ij} &= \gamma_0 \delta_{ij} + \gamma_1 B_{ij} + \gamma_2 B_{ik} B_{jk} \\ &= \gamma_2 I_3 B_{ij}^{-1} + (\gamma_0 - \gamma_2 I_2) \delta_{ij} + (\gamma_1 - \gamma_2 I_1) B_{ij} \end{aligned} \quad (3.371)$$

ifadeyi yeni hali olan

$$\hat{\sigma}_{ij} = \left(\frac{\partial W}{\partial I_3} I_3 - I_2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial I_1} B_{ij} + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_2} B_{ij}^{-1} \quad (3.372)$$

biçiminde yazabiliriz. Öte yandan sıkıştırılamazlıktan dolayı $I_3 = 1$ ve $\frac{\partial W}{\partial I_3} = 0$ olduğundan ve de keyfi gerilmeyi temsil eden parantez içerisindeki diğer terimi de $-p$ ile gösterecek olursak ifade yeni halini ($\hat{\sigma}_{ij}$ yerine artık σ_{ij} ile göstererek)

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial I_1} B_{ij} + \frac{\partial W}{\partial I_2} B_{ij}^{-1} \quad (3.373)$$

biçiminde alır, benzer bir göserimle

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial I_1} B_{ij} + \frac{\partial W}{\partial I_2} c_{ij} \quad (3.374)$$

biçiminde ifade edilir. Cauchy gerilmesinin, gerinim enerjisinin I_1 ve I_2 değişmezlerine göre türevlerine bağlı ifadesi tanımlanmıştır, ancak gerinim enerjisinin I_1 ve I_2 ye bağlı ne tür bir fonksüyon olduğu Rivlin tarafından şekillendirilmiş ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır. [8]

$$W = \sum C_{\alpha\beta} (I_1 - 3)^\alpha (I_2 - 3)^\beta \quad (3.375)$$

burada $\alpha = 1$ ve $\beta = 0$ seçilirse

$$W = \sum C_{10} (I_1 - 3)^1 (I_2 - 3)^0 = \sum C_{10} (I_1 - 3)^1 = C_{10} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (3.376)$$

ve izotropik cismin tek eksenli gerilme durumu için hacim sabitliği kabulüyle ele

alındığında $\lambda_1 = \lambda$ $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\lambda}$ olduğundan

$$W = C_{10} (\lambda^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) = C_{10} \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} - 3 \right) = C_{10} \left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda} - 3 \right) \quad (3.377)$$

ve

$$\sigma = \frac{\partial W}{\partial \lambda} = C_{10} \left(2\lambda - \frac{2}{\lambda^2} \right) = 2C_{10} \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) = G \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \quad (3.378)$$

ki i        n en sağ kısmı (3.345)’de Neo-Hookean adıyla tanıtılan ifadenin aynısıdır, ki bunun yorumu $\alpha=1$ ve $\beta=0$ seçildiğinde Rivlin ifadesinin NeoHookean’ı verdiği ve kayma modülü G ’nin $2C_{10}$ ‘a eşit olduğu şeklinde-dir. Mooney-Rivlin’in yanısıra benzer bakış açısıyla türetilmiş ve MARC’ın malzeme modeli oluşturmakta kullandığı Signiorini , Green-Simpson ,Yeoh vb. gibi, gerinim enerjisinin ne tür bir fonks  yonla I_1 ve I_2 ye bağlı olduğunu ortaya koyan farklı formulasyonların türevleri ve çizdiği eğrilere, dolayısıyla birbirleriyle olan farklılıklara ileride ayrıntılarıyla değinilecektir.

Daha önce de yapılmak istenen kıyas bağlamında bahsedildiği üzere, ifadesini kauçuğun bir miktar sıkıştırılabilirliği üzerine kurmasıyla Mooney-Rivlin’den ayrılan Ogden, 1972 yılında aşağıdaki eşitliği ortaya atmıştır. [8]

$$W = \sum_n \frac{\mu_n}{\alpha_n} [\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3] \quad (3.379)$$

ki burada da $n=2$ alındığında $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -2, \mu_1 = 2C_1$ ve $\mu_2 = -2C_2$ seçilmesiyle ifade aşağıda görüleceği gibi [8]

$$\begin{aligned} W &= \sum_{n=1}^2 \frac{\mu_n}{\alpha_n} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n} - 3) = \\ &= \frac{\mu_1}{\alpha_1} (\lambda_1^{\alpha_1} + \lambda_2^{\alpha_1} + \lambda_3^{\alpha_1} - 3) + \frac{\mu_2}{\alpha_2} (\lambda_1^{\alpha_2} + \lambda_2^{\alpha_2} + \lambda_3^{\alpha_2} - 3) \end{aligned} \quad (3.380)$$

ve

$$\begin{aligned} W &= \frac{2C_1}{2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + \frac{2C_2}{2} (\lambda_1^{-2} + \lambda_2^{-2} + \lambda_3^{-2} - 3) = \\ &= C_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2} - 3 \right) \end{aligned} \quad (3.381)$$

ifadenin, C_2 nin   arpanını te  kil etti  i parantez i  indeki kısmın pay ve paydasını $(\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2)$ ile   arpıp e  itli  in tamamını yeniden d  zenlersek

$$W = C_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2 \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2} \left(\frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2}{\lambda_1^2} + \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2}{\lambda_2^2} + \frac{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2}{\lambda_3^2} - 3 \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \right) \quad (3.382)$$

$$W = C_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2 \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2} (\lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_2^2 - 3 \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2)$$

(3.382)

hacim sabitliği kabulüyle $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$ dolayısıyla $(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3)^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$ için

$$W = C_1(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2(\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 - 3) \quad (3.383)$$

yazılır ki

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (3.384)$$

yerine yerleştirilirse

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (3.385)$$

bulunur ki bu MARC'ın da kullandığı orijinal Mooney notasyonudur, ve

$$C_1 = C_{10} = C_{\alpha\beta} \quad C_2 = C_{01} = C_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta=1,0 \text{ 'ın döngüsel permütasyonu } (\alpha=1$$

iken β mutlaka 0 ve $\alpha=0$ iken β mutlaka 1) olacak şekilde alınırsa

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) = C_{10}(I_1 - 3)^1 C_{01}(I_2 - 3)^0 + C_{01}(I_1 - 3)^0 C_{10}(I_2 - 3)^1 \quad (3.386)$$

olur ki ifadenin sağ tarafınının toplam simgesi \sum ile gösterimi daha önce de verilen Rivlin'in (1968) [8]

$$W = \sum C_{\alpha\beta} (I_1 - 3)^\alpha (I_2 - 3)^\beta \quad (3.387)$$

biçimindeki ifadesidir. Görüldüğü üzere $n=2$ alındığında $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -2, \mu_1 = 2C_1$ ve $\mu_2 = -2C_2$ seçilmesiyle Ogden ifadesi Mooney-Rivlin'e dönüşür ki bu da ileride MARC'ta oluşturulacak malzeme modeli eğrilerinde Ogden katsayı adedinin bilinçli olarak 2 ve seçilmesiyle $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -2, \mu_1 = 2C_1$ ve $\mu_2 = -2C_2$ Mooney-Rivlin malzeme modeli eğrisiyle kıyaslamalı olarak örneklenecektir. [8]

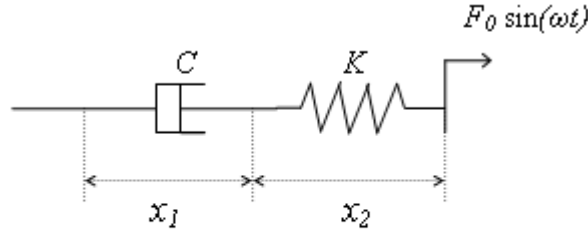
3.11 Kauçuğun, Yay-Damper Sistemi Tipleriyle Temsili

Bu bölümde kauçuğun davranışını temsil etmek üzere seçilen Maxwell, Kelvin-Voigt ve Zeener Modellerine ait hareket denklemlerinden yay katsayısı K ve sönüm katsayısı C'nin çekilmesi, tek eksenli gerilme durumu için okunmuş bir test sonucunun sınır değerler olarak girilmesiyle, C ve K katsayılarının sayısal

değerlerinin tayini, bu değerlerin yerine konduğu hareket denkleminin kuvvet cevabının deneysel sonuç ve Marc çözümleme sonuçlarıyla kıyaslanması, ayrıyetten sayısal değerleri tayin edilecek K ve C'nin "MARC Sönümlenme Özelliği" kısmına girilerek, MARC'ın verdiği histerisis cevabında ne gibi farklılıklar gösterdiğinin üzerinde durulacaktır.

3.11.1 Maxwell Modeli

Aşağıdaki şekilde görülebileceği üzere, Maxwell modelinde toplam yer değiştirme, yay ve sönüm elemanı üzerindeki yer değiştirmelerin toplamıdır. Kuvvet ise her iki eleman üzerinde aynıdır.



Şekil 3. 38 Maxwell modelinin şematik temsili

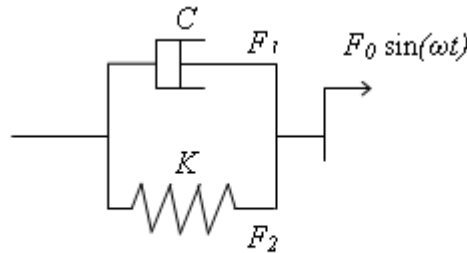
$$x = x_1 + x_2 \quad \dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \quad (3.388)$$

$$\dot{x}_1 = \frac{F}{C} \quad x_2 = \frac{F}{K} \quad \dot{x}_2 = \frac{\dot{F}}{K} \quad (3.389)$$

$$\dot{x} = \frac{\dot{F}}{K} + \frac{F}{C} \quad (3.390)$$

3.11.2 Kelvin-Voigt Modeli

Bu modelde, aşağıdaki şekilde de görülebileceği üzere, her iki eleman üzerindeki yer değiştirmeler eşit, kuvvet ise her iki elemandakinin toplamıdır.



Şekil 3.39 Kelvin-Voigt modelinin şematik temsili

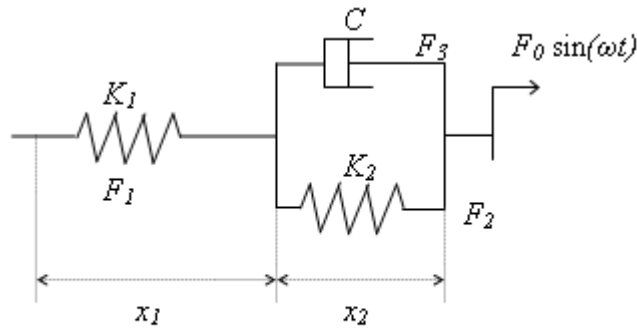
$$F(t) = F_1 + F_2 \quad (3.391)$$

$$C \dot{x} = F_1 \quad K x = F_2 \quad (3.392)$$

$$F(t) = C \dot{x} + K x \quad (3.393)$$

3.11.3 Zeener Modeli

Aşağıdaki şekilde yer alan model doğrultusunda ilgili eşitlikler önceki iki modelle kıyaslamalı olarak yazılabilir.



Şekil 3.40 Zeener modelinin şematik temsili

$$x = x_1 + x_2 \quad (3.394)$$

$$x_1 = \frac{F_1}{K_1} \quad F_2 = K_2 x_2 \quad F_3 = C \dot{x}_2 \quad (3.395)$$

$$F_1 = F_2 + F_3 \quad x_1 K_1 = K_2 x_2 + C \dot{x}_2 \quad (3.396)$$

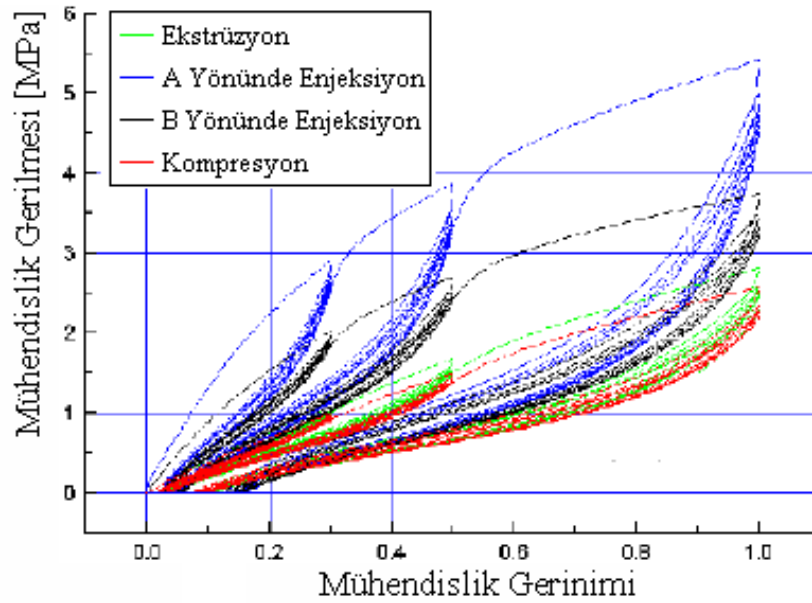
$$\frac{F_2}{K_2} = \frac{F_3}{C} = \dot{x}_2 \quad (3.397)$$

4. Malzeme özelliğinin Tespiti ve Sonlu Elemanlar Yazılımına Aktarımı

4.1 Kauçuk Plaka ve Parça Testleri, MARC'ta Yapılan Çözümlemeleri

Sonlu elemanlar yöntemiyle doğrusal olmayan davranışa haiz bir konstrüksiyon geliştirmek için öncelikle hamurdan yola çıkılarak test plakaları basılır, bu test plakalarında kesilecek deneklerle üç temel şekil değiştirme durumunu sınavan tek eksenli, iki eksenli ve düzlemsel kayma çekme testleri yapılır. Test sonuçları sonlu elemanlar çözümleme yazılımına aktarılır. Bu üç temel test çeşidi

için ,testin tek elemanlı temsilinin ve gerçek denek konstrüksiyonunun modellendiği programlar oluşturulup testler yazılım üzerinde yaptırılır. Edinilen sonuçlar plaka numunelerinin test sonuçlarıyla kıyaslanır. Mevcut malzeme eğrisi oluşturma yaklaşımları içinde, bu üç test çeşidi için de ortak en tatminkar çakışmayı veren model malzeme modeli olarak atanır. Bitmiş parça için düşünülen konstrüksüyönlär modellenir , her bir konstrüksüyön için atanmış malzeme modeliyle öngörülen mekanik testler yazılım üzerinde gerçekleştirilir. İhtiyaç duyulan konstrüksüyönel iyileştirmeler, sonlu elemanlar modeline uygulanır ve atanmış bulunan malzeme modeliyle erişilen en iyi konstrüksüyönün imali için prtototip kalıp yaptırılır. Yapılan prototip kalıpta, test plakaları için kullanılmış olan karışım , aynı pişirme yöntemi (Kompresyon, Ekstrüzyon veya Vulkanizasyon-kauçuk davranışına etkleri için bkz. Şekil 4.1.)



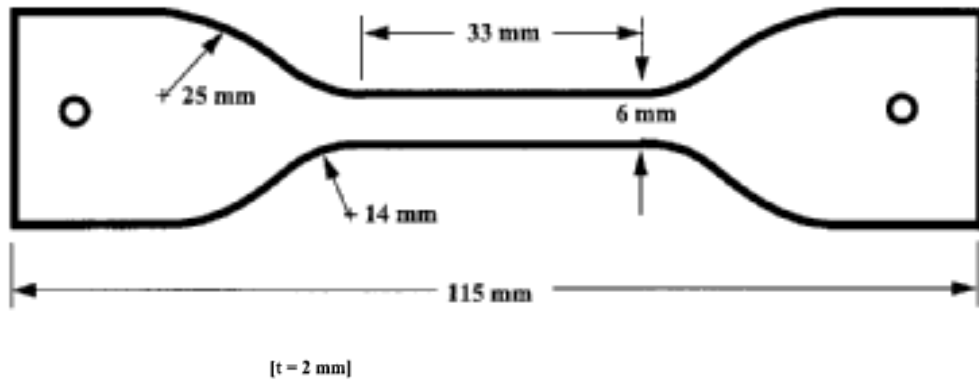
Şekil 4.1. Aynı hamur ve farklı pişirme yöntemleriyle basılmış deneklerin yük altındaki davranışlarının kıyası [1]

ve değişkenleriyle (en temel olarak pişirme sıcaklığı ve süresi) kalıplanır. Ve uygun laboratuvar ortamında şartlandırılan parça , yazılımda bitmiş parça için öngörülüp hesaplamaları yapılmış tüm testlerin gerçeğine tâbi tutulur. Bitmiş parçaya ait gerçek test sonuçları, sonlu elemanlar modeliyle hesaplanan yazılım üzerindeki test sonuçlarıyla kıyaslanır.

Sonlu elemanlar yöntemiyle doğrusal olmayan davranışa haiz bir konstrüksiyon geliştirmek için öngörülmüş bu tipik yöntemin doğruluğunu kalıp imaline gerek kalmaksızın sınavabilmek adına, işleme tersinden başlanmıştır. Bitmiş parçayla aynı reçeteye sahip hamurdan, aynı pişme tipi (bu örnekte vulkanizasyon) ve koşullarında basılmış test plakalarından standart ölçülerde kesilmiş kauçuk denekler tek eksenli, iki eksenli çekme ve düzlemsel kaymalı çekme, tek eksenli relaksasyon, düzlemsel kaymalı relaksasyon, tek eksenli sabit gerinimde çok çevrimli çekme, tek eksenli eş artımlı gerinimde çekme deneylerine tâbi tutulmuş, böylelikle kauçuğun doğrusal olmayan davranışı, yükleme ve boşaltma eğrilerinin çakışık olmaması kaynaklı (histerisis) sönümleme özelliği, mekanik özelliklerinin zamana bağlı oluşu (viskoelastisite); aynı gerinimde tekrarlanan çevrimler için, test zamanından (viskoelastisiteden) bağımsız olarak her tekrarda bir öncekine kıyasla daha düşük bir en yüksek gerilme değeri vermesi (çevrim tekrarına bağlı peklik kaybı) ve sıfır yükten geçerken bir önceki çevrime kıyasla üzerinde daha fazla bir yerdeğiştirme kalması (biçim değıştirme); sabit hızda ve eş artımlardaki gerinimlere maruz bırakıldığında, artan gerinimler için yükleme eğrileri nispeten çakışıkken, yüksek gerinimlerdeki boşaltma eğrilerinin, düşük gerinimlerdekilerin altından geçecek biçimde içbükey kavisler çizmesi (süreksiz hasar davranışı); standart ölçülerde kesilmiş olması koşuluyla kauçuk deneklerin düzlemsel kayma test sonuçlarının, çift eksenli çekme test sonuçlarına göre daha düşük, tek eksenli çekme test sonuçlarına göre ise daha yüksek gerilme değerleri vermesi gibi mekanik özellikleri sergileyen plaka testlerine ait deneysel sonuçlar, MARC sonlu elemanlar çözümleme yazılımına girilmiş, deneklerin tek elemanlı ve gerçek denek konstrüksiyonuna haiz çok elemanlı modelleri oluşturulmuş, oluşturulan malzeme modelleri, deneklere ait bu sonlu elemanlar modellerinde çözümlemeye tâbi tutulmuş, plaka testi sonuçlarına en çakışık çözümleme sonucunu veren malzeme modeli, nihai malzeme modeli olarak seçilmiş ve ilgili malzeme modelinin atandığı bitmiş konstrüksiyon olan hidrolik motor takozunun yağ dolumundan önceki haline, basma-çekme testleri yine yazılım üzerinde simule ettirilerek, elde edilen sonlu elemanlar çözümleme sonuçları, gerçek parça üzerinde yapılan test sonuçlarıyla kıyaslanmıştır. Bahsi geçen aşamalar aşağıda yer alan başlıklarda adım adım açıklanmıştır.

5. DENEK HAZIRLAMA

Denek hazırlamada (vulkanizasyonda plakaların standart profillere haiz bıçaklarla kesilmesi ve kesme hızları ve test öncesi şartlandırma, laboratuvar koşulları ve testlerin tatbikinde ilgili ASTM şartnameleri [10] , [11] temel alınmıştır. Bitmiş parçadakiyle aynı hamur reçetesi ve vulkanisasyon koşullarında basılan 2mm kalınlığındaki plakalar , tek eksenli çekme deneyleri için Resim 1’de öngörülen boyutlarda hazırlanmıştır. [1]



Şekil 5.1. Tek eksenli çekme testi için papyon denek ölçüleri. [1]

Düzlemsel Kayma testi denekleri için Resim 2’de verilen orantı [1], tek eksenli çekme deneğinin et kalınlığı olan 2mm’yi sağlayacak biçimde iki katı olarak alınmış ve 26x126x2mm ölçülerinde hazırlanmıştır.



Şekil 5.2. Düzlemsel Kaymalı çekme test denek boyutları oranı.

İki eksenli çekme testi için, test düzeneğinin imal güçlüğünden ötürü, yazılımın öngördüğü dairesel denekten farklı olarak, MARC’ın yazılımcı şirketi MSC’nin teknik danışmanı Sn. Alex Ramsey’in yönlendirmesiyle, kauçuk tedarikçisi Dupont’un uyguladığı gibi 85 x 85 x 2mm ‘lik kare bir denek hazırlanmıştır.

6. Test Düzeneklerinin Hazırlanması ve Testlerin Yapılması

6.1 Test Düzeneklerinin Hazırlanması

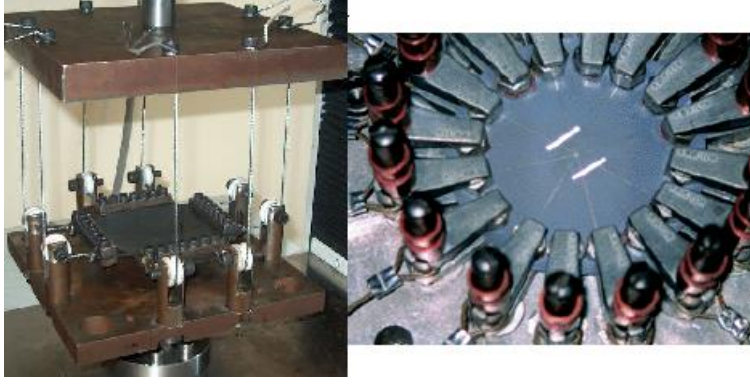
Test düzenekleri yazılımcı firmanın öngördüğü üzere [1] imal edilmiş ve kıyas teşkil etmesi amacıyla, öngörülen aparatlarla birlikte Şekil 6.1, 6.2 ve 6.3'te sergilenmiştir. İlgili şekillerde yeralan resim çiftlerinden sağ taraftakiler tez kapsamında yapılan testlere ait gerçek düzenekler, soldakiler ise MARC'I üreten yazılımcı şirket MSC'nin elastomer analizi rehberinde öngördüğü test düzenekleridir.



Şekil 6.1. Tek eksenli çekme düzenekleri kıyası [1]



Şekil 6.2. Düzlemsel Kaymalı çekme düzenekleri kıyası [1]



Şekil 6.3. İki eksenli çekme düzenekleri kıyası [1]

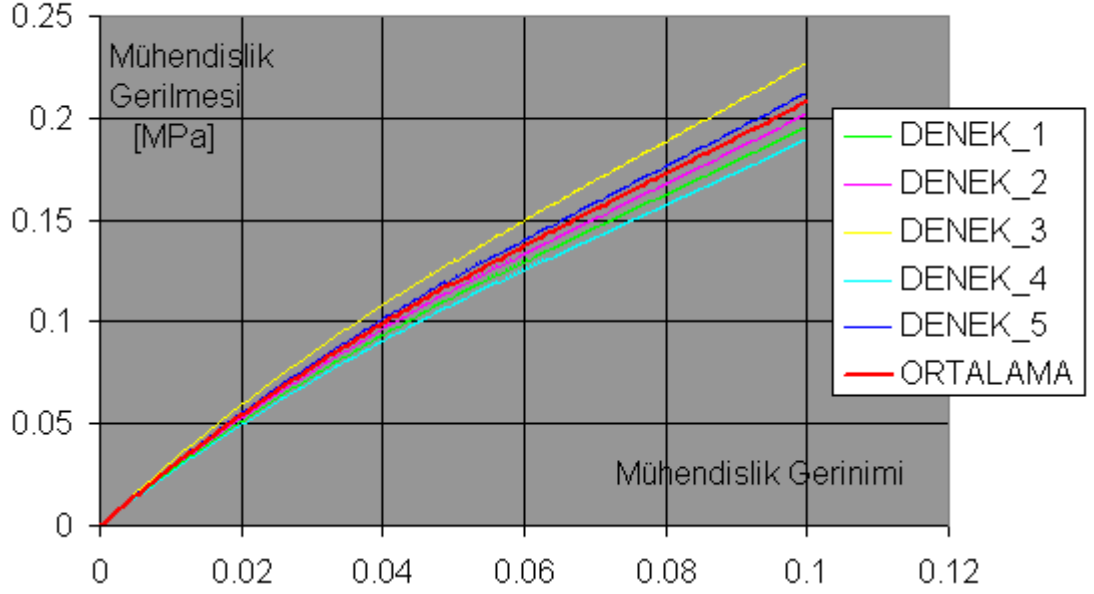
Yukarıdaki şekillerden sağda yeralan, MSC kullanım klavuzunca öngörülmüş test düzeneği olan, dairesel dizilime sahip, eşdeğer iki eksenli çekme cihazının imal güçlüğünden ötürü, MSC teknik danışmanı Alex Ramsey'in tavsiyesiyle, tanınmış kauçuk tedarikçisi Dupont'un kullandığı 83x83x2mm boyutlarındaki kare denekler için hazırlanmış iki eksenli çekme düzeneği kullanılmıştır.

6.2 Test Sonuçları

Testler bir önceki bölümüm başlıklarından da anlaşılabilceği üzere, tek eksenli çekme, iki eksenli çekme ve düzlem gerilme durumu için, %10, %20, %30, %40 ve %50'lik gerinimlerde beş denek üzerinden, 10mm/dk'lık hızda yapılmıştır. Deneysel sonuçlar aşağıda, her temel gerilme durumu için ayrı alt başlık altında, her denek için ayrı olarak ve beş deneğin ortalamasına ait eğriyle üst üste çakıştırılmış halde verilmiştir.

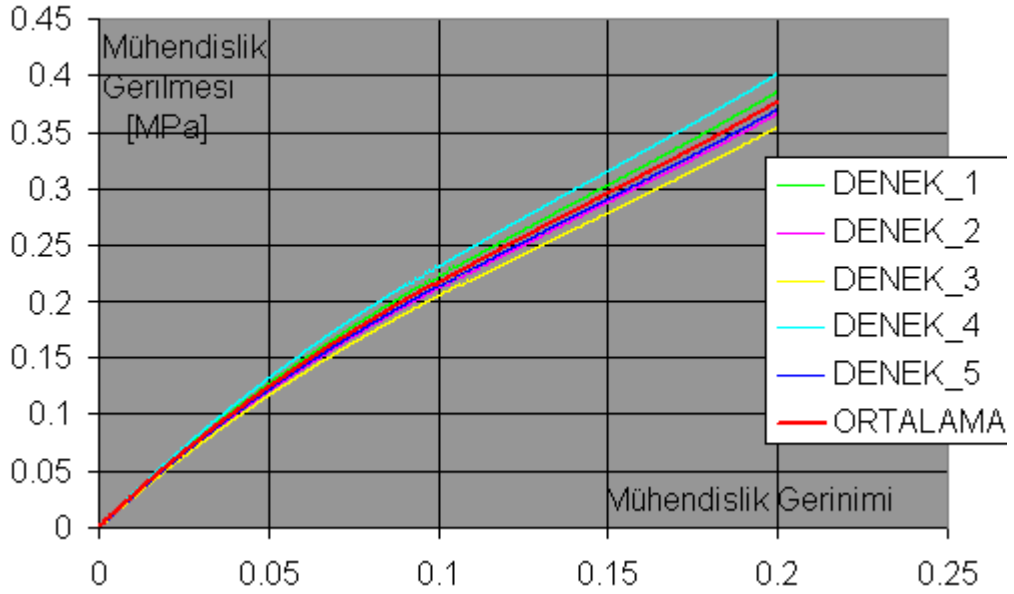
6.2.1 Tek Eksenli Çekme Test Sonuçları

%10 GERİNİMDEKİ TEK EKSENLİ ÇEKME DENEYİ SONUÇLARI



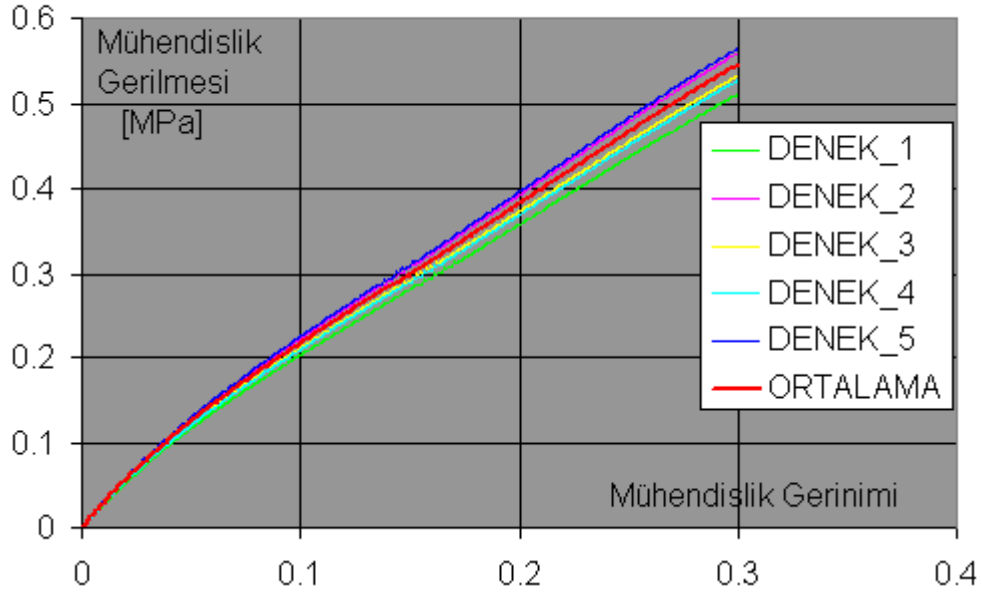
Şekil 6.4 %10 Gerinimdeki Tek Eksenli Çekme Test Sonuçları

%20 GERİNİMDEKİ TEK EKSENLİ ÇEKME DENEYİ SONUÇLARI



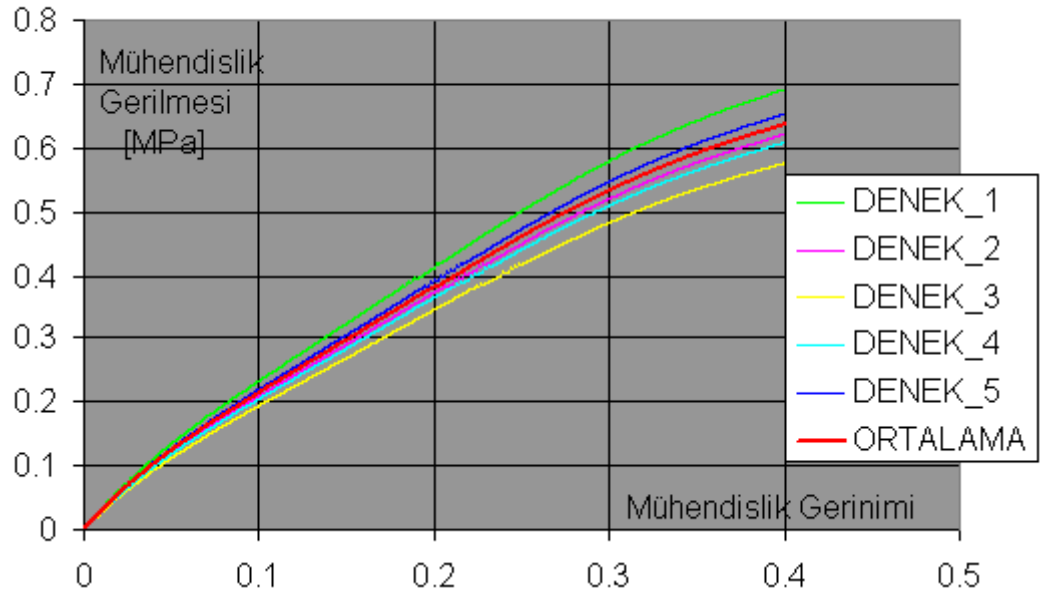
Şekil 6.5 %20 Gerinimdeki Tek Eksenli Çekme Test Sonuçları

%30 GERİNİMDEKİ TEK EKSENLİ ÇEKME DENEYİ SONUÇLARI



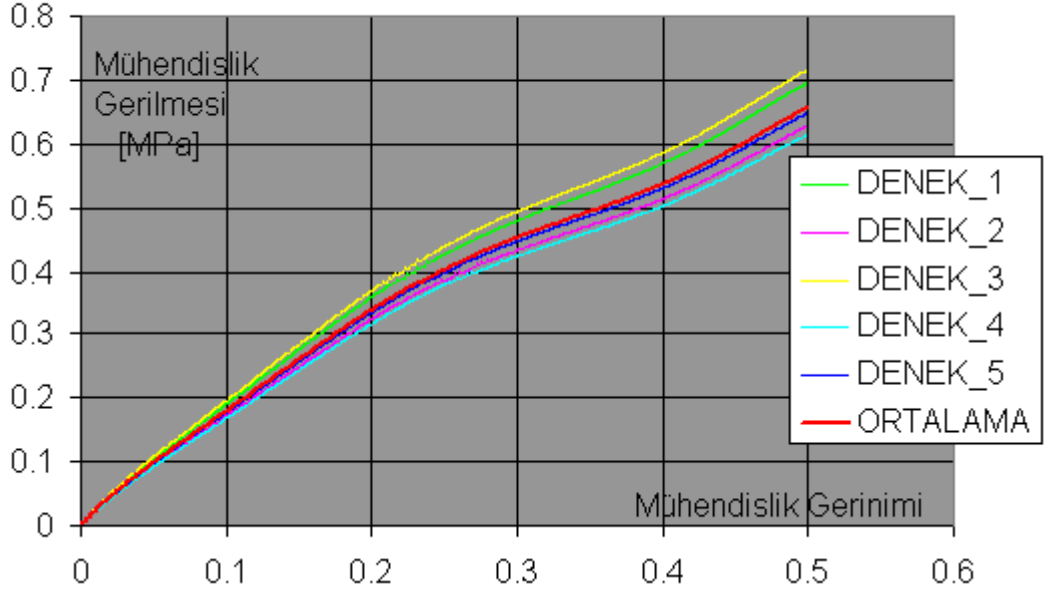
Şekil 6.6 %30 Gerinimdeki Tek Eksenli Çekme Test Sonuçları

%40 GERİNİMDEKİ TEK EKSENLİ ÇEKME DENEYİ SONUÇLARI



Şekil 6.7 %40 Gerinimdeki Tek Eksenli Çekme Test Sonuçları

%50 GERİNİMDEKİ TEK EKSENLİ ÇEKME DENEYİ SONUÇLARI

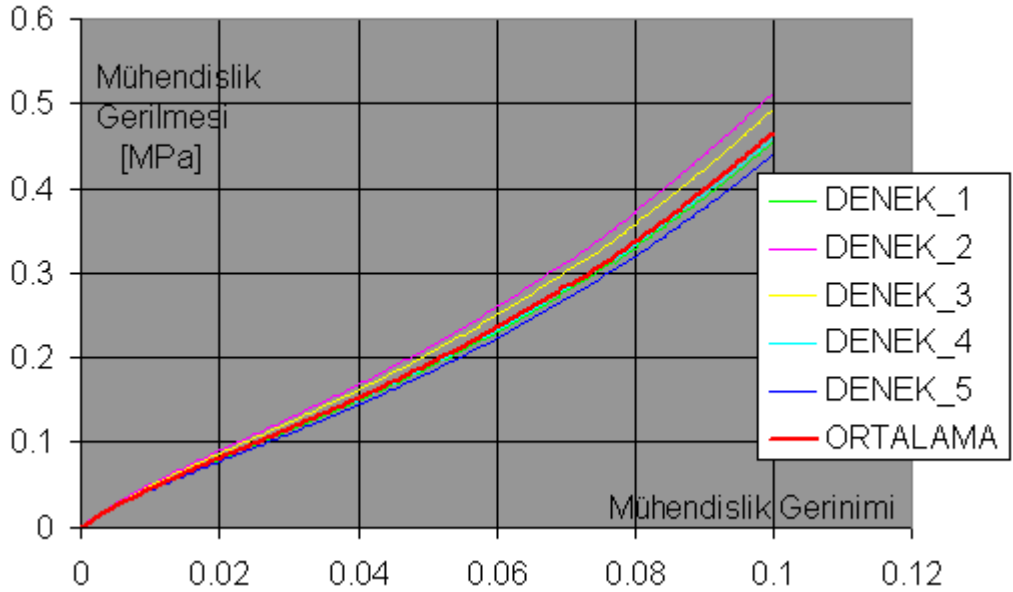


Şekil 6.8 %50 Gerinimdeki Tek Eksenli Çekme Test Sonuçları

6.2.2 İki Eksenli Çekme Test Sonuçları

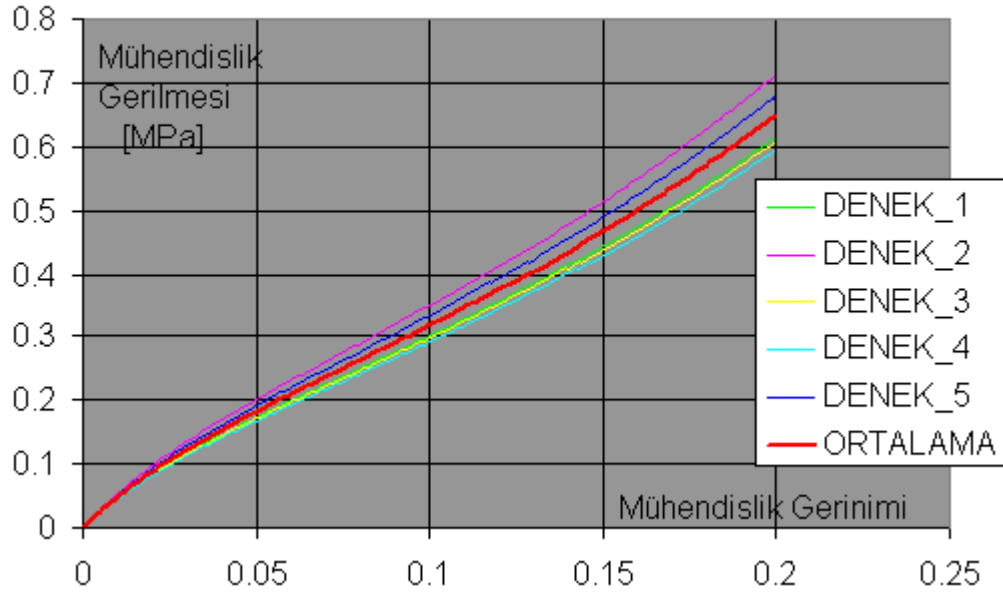
İki eksenli çekme testi de aynı şekilde %10, %20, %30, %40 ve %50’lik gerinimlerde beş denek üzerinden 10mm/dk’lık hızda yapılmıştır sonuçları ilgili gerinimler için aşağıda verilmiştir.

%10 GERİNİMDEKİ İKİ EKSENLİ ÇEKME DENEYİ SONUÇLARI



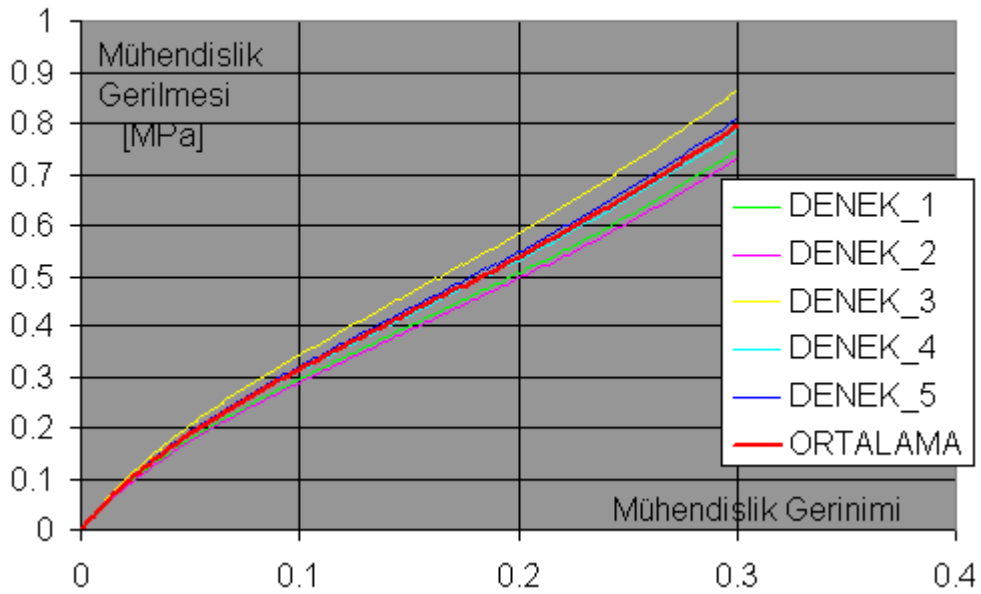
Şekil 6.9 %10 Gerinimdeki İki Eksenli Çekme Test Sonuçları

%20 GERİNİMDEKİ İKİ EKSENLİ ÇEKME DENEYİ SONUÇLARI



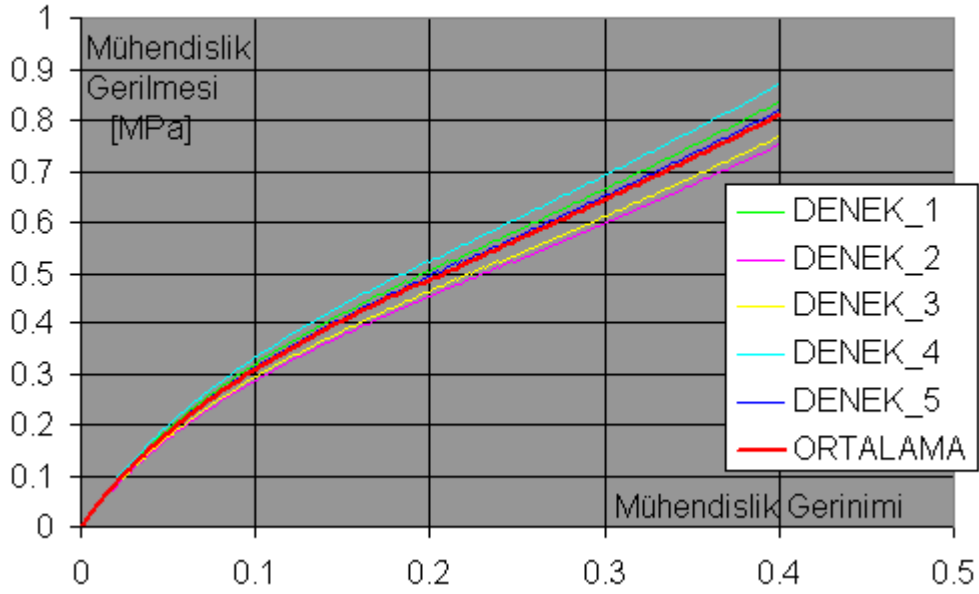
Şekil 6.10 %20 Gerinimdeki İki Eksenli Çekme Test Sonuçları

%30 GERİNİMDEKİ İKİ EKSENLİ ÇEKME DENEYİ SONUÇLARI



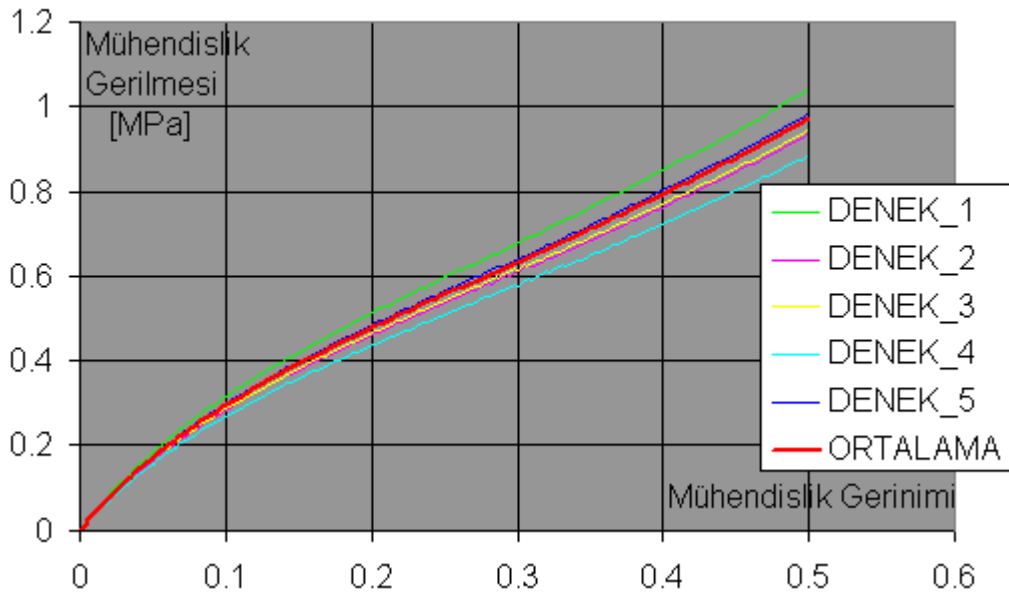
Şekil 6.11 %30 Gerinimdeki İki Eksenli Çekme Test Sonuçları

%40 GERİNİMDEKİ İKİ EKSENLİ ÇEKME DENEYİ SONUÇLARI



Şekil 6.12 %40 Gerinimdeki İki Eksenli Çekme Test Sonuçları

%50 GERİNİMDEKİ İKİ EKSENLİ ÇEKME DENEYİ SONUÇLARI

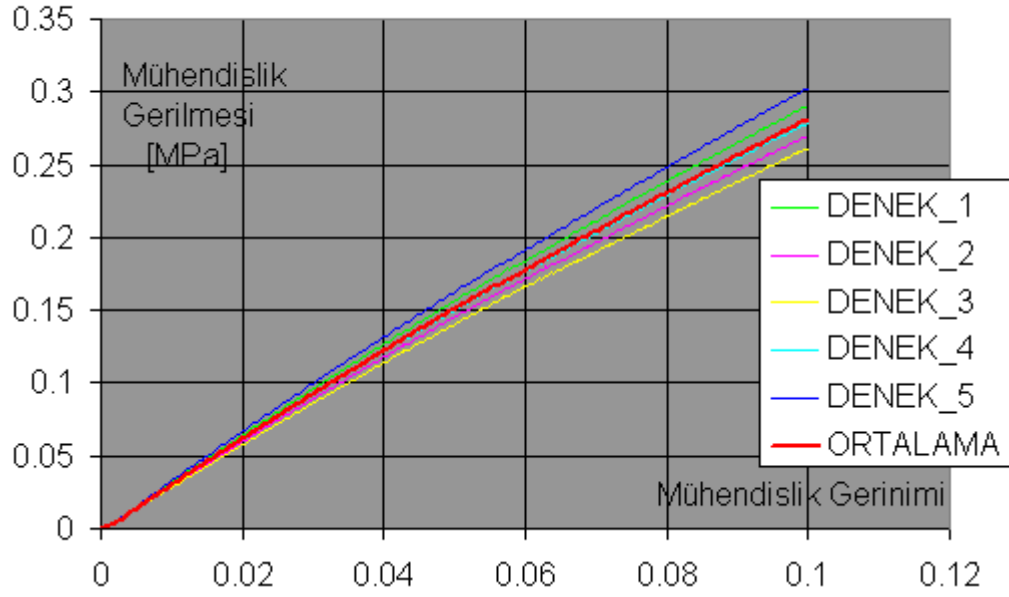


Şekil 6.13 %50 Gerinimdeki İki Eksenli Çekme Test Sonuçları

6.2.3 Düzlem Kayma Gerilmesi Test Sonuçları

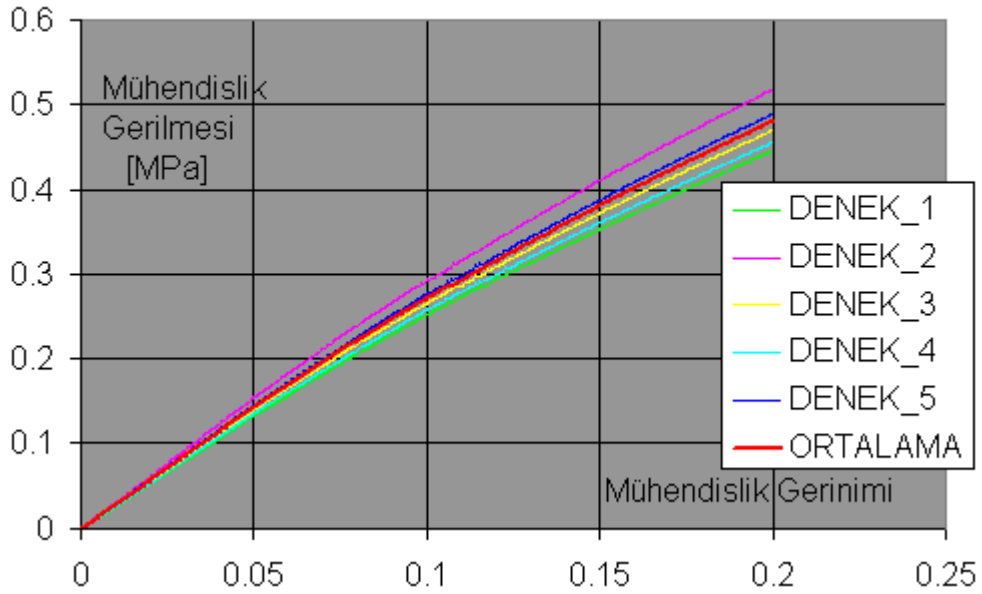
Düzlem Kayma Gerilmesi Testleri de aynı şekilde %10, %20, %30, %40 ve %50'lik gerinimlerde beş denek üzerinden 10mm/dk'lık hızda yapılmıştır. Sonuçları ilgili gerinimler için aşağıda verilmiştir.

%10 GERİNİMDEKİ DÜZLEMSEL KAYMA ÇEKME DENEYİ SONUÇLARI



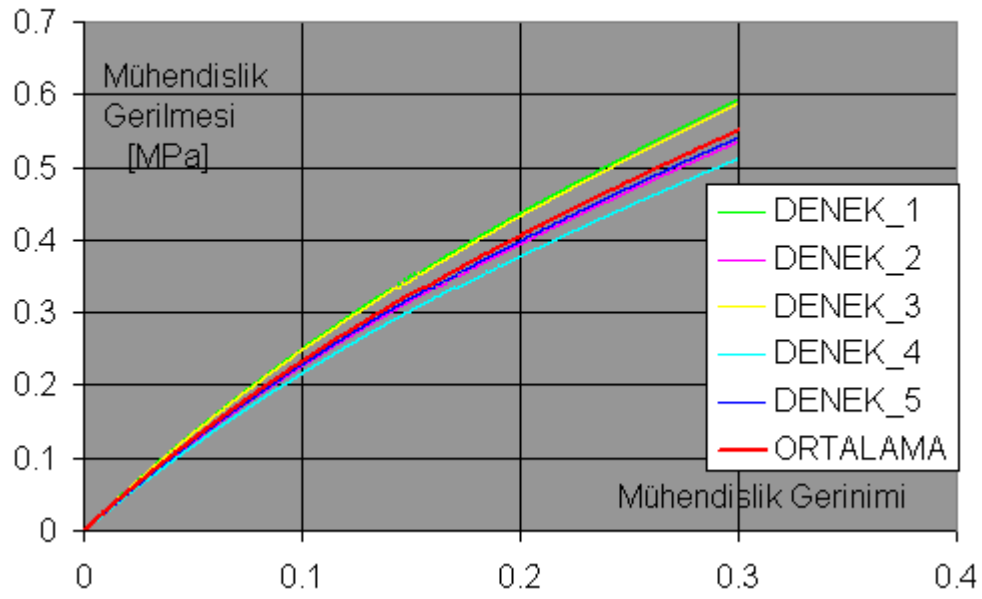
Şekil 6.14 %10 Gerinimdeki Düzlem Kayma Gerilmesi Test Sonuçları

%20 GERİNİMDEKİ DÜZLEMSEL KAYMA ÇEKME DENEYİ SONUÇLARI



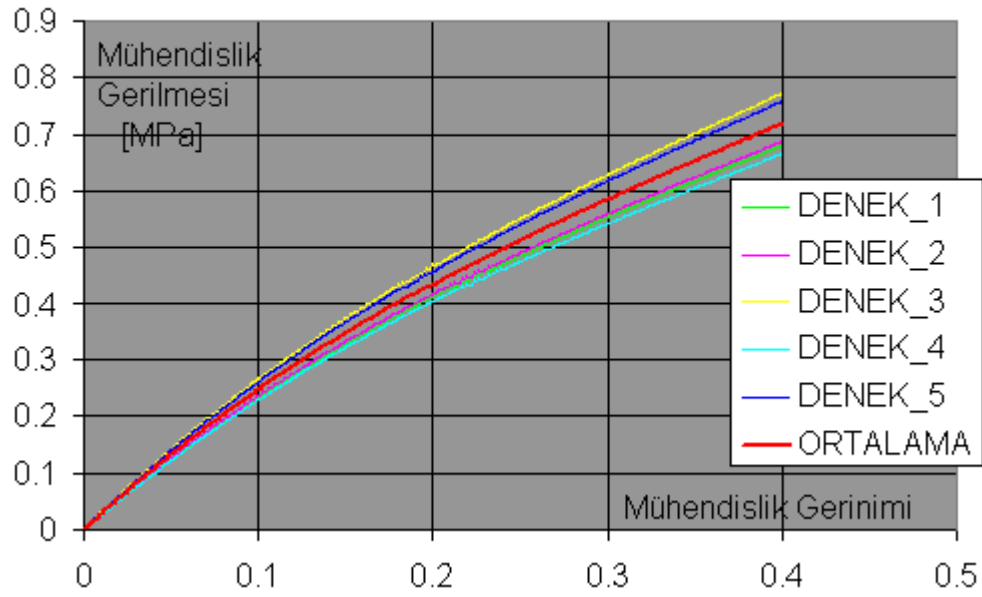
Şekil 6.15 %20 Gerinimdeki Düzlem Kayma Gerilmesi Test Sonuçları

%30 GERİNİMDEKİ DÜZLEMSEL KAYMA ÇEKME DENEYİ SONUÇLARI



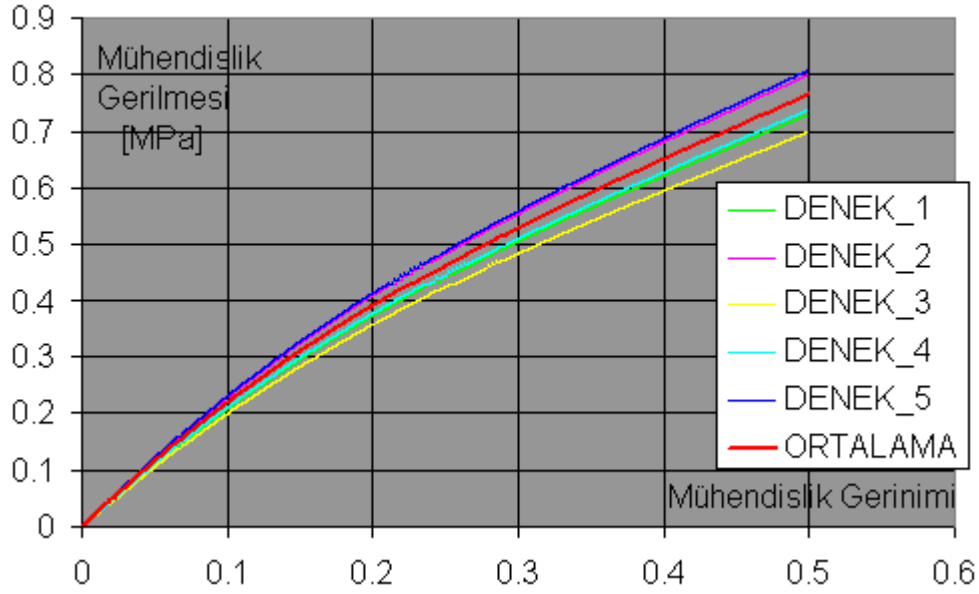
Şekil 6.16 %30 Gerinimdeki Düzlem Kayma Gerilmesi Test Sonuçları

%40 GERİNİMDEKİ DÜZLEMSEL KAYMA ÇEKME DENEYİ SONUÇLARI



Şekil 6.17 %40 Gerinimdeki Düzlem Kayma Gerilmesi Test Sonuçları

%50 GERİNİMDEKİ DÜZLEMSEL KAYMA ÇEKME DENEYİ SONUÇLARI

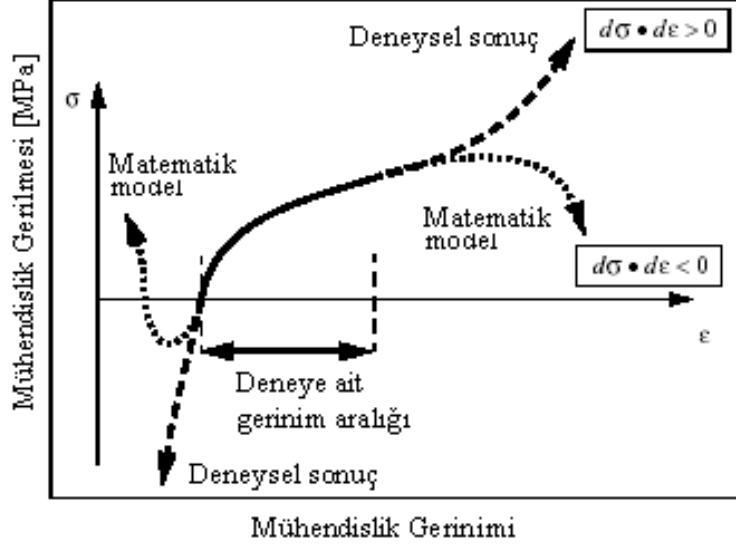


Şekil 6.18 %50 Gerinimdeki Düzlem Kayma Gerilmesi Test Sonuçları

7 TEST SONUÇLARININ MARC'A GİRİLMEK ÜZERE HAZIRLANMASI

Deneklerin testleri , bitmiş parçanın testlerinde öngörüldüğü gibi 3'er çevrimden 10mm/dk'lık hızda, %10, %20, %30 ve %40'lık gerinimlerde yapılmıştır. Bitmiş parçaya ait deneylerde en fazla %20'lik bir yer değiştirme öngörülüyor iken, deneklerde niçin %40'lara varan gerinimlerde test yapıldığı ise şöyle açıklanabilir: Bitmiş parçaya ait sonlu elemanlar modelinde parça, yazılım üzerinde örneğin %20'lik bir gerinime maruz bırakılırken, dizilimine göre kimi meşler %20'den çok daha yüksek gerinimler kaydedebilirler. Doğrusal olmayan malzemeleri temsil etmek üzere yazılımların malzeme modeli olarak çakıştırdığı eğriler ise Hook eğrisi gibi malzeme kanunu değil yalnızca matematiksel yaklaşımlardır. Dolayısıyla sıfırdan %20 gerinime dek iyi bir çakışma sağlamış bir matematik modeli, tıpkı bir polinomun tepe noktasından sonra inişe geçmesi gibi, belli bir değerden sonra çok farklı cevaplar kaydedebilir. Bu yüzdendir ki, bitmiş parça için öngörülen gerinimlerin belli bir emniyet katsayısıyla çarpılmış kadarını deneklere tabi tutmak, ve yazılımdaki matematiksel model çakıştırmayı bu yüksek tutulmuş gerinimlerde gerçekleştirmek gerekir. Şekil 2, deneye ait gerinim aralığının dışında matematik eğriyle, deneysel sonuçların birbirinden ayrıldığı bu durumu göstermektedir. Deneysel sonuç eğrisinin yanında yeralan $d\sigma \cdot d\epsilon > 0$ ifadesi, eğrinin Druckers

kararlılık ölçütüne [1] göre kararlı, matematik modelin yanındaki $d\sigma \cdot d\epsilon < 0$ ise kararsız olduğunu ifade eder. MARC yazılımında, matematiksel eğriyi oluşturma aşamasında, en baştan kararlı bir eğri elde etmek için $d\sigma \cdot d\epsilon > 0$ sorgulamasını otomatik olarak yapan ‘sıfırdan büyük katsayılar’ kutucuğu etkin hale getirilmelidir.

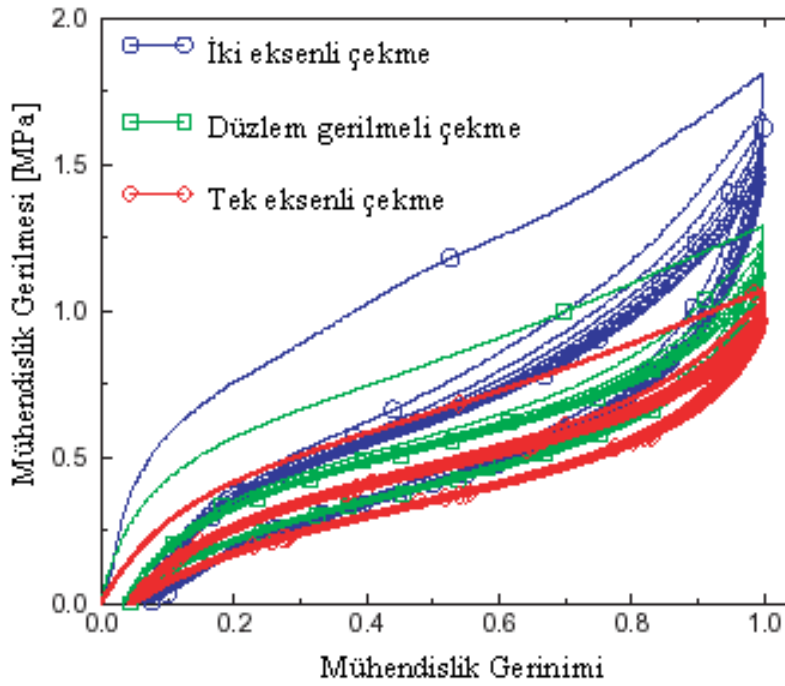


Şekil 7.1 Deneysel sonuç ve matematiksel eğri

Ayrıca, artı katsayılar yöntemiyle Druckers kararlılığı sağlansa da, kararlı kılınmış matematiksel eğri, ilgilenilen gerinim aralığı dışında kauçuğun davranışına aykırı bir yönelim sergileyebilir. Bunu denetlemek için, matematik eğriyi geliştirmeden önce, ilgili gerinim aralığının artı ve eksi kısımlarında yüzde kaçlık bir ekstrapolasyonla matematik eğriyi devam ettireceğinin kullanıcı tarafından belirlendiği seçenek devreye sokulmalı, ve %40’lık gerinimdeki bu örnek için dahi, matematiksel eğrinin, gerinim aralığının ötesinde ve berisinde sergilediği görünümün, deneysel sonuçlara ve genel kauçuk davranışına uyup uymadığı gözden geçirilmelidir. Gerinim aralığın ötesinde ve berisinde derken, ötesindeyle neyin kastedildiği açıktır; %40’lık bir çekme birim yer değiştirmesi için, 1.25’lik ötesi %50’lik çekme birim yer değiştirmesine karşılık gelmektedir. Berisiyle kasıt ise, örneğin 0.25’lik berisi için, atanan matematiksel ifadenin $\%40 \cdot 0.25 = \%10$ ’luk basma birim yer değiştirmesinde ne gibi bir gidişat sergilendiğinin denetimi anlamına gelmektedir. Tez kapsamında geliştirilecek malzeme modeli eşitliklerinde ise, bitmiş parçanın analizinde, sonlu eleman modelinde yeralan meşlerin hiçbirisinin %50’den daha büyük birim yerdeğiştirmelere maruz kalmayacağından, basma ve çekme yer

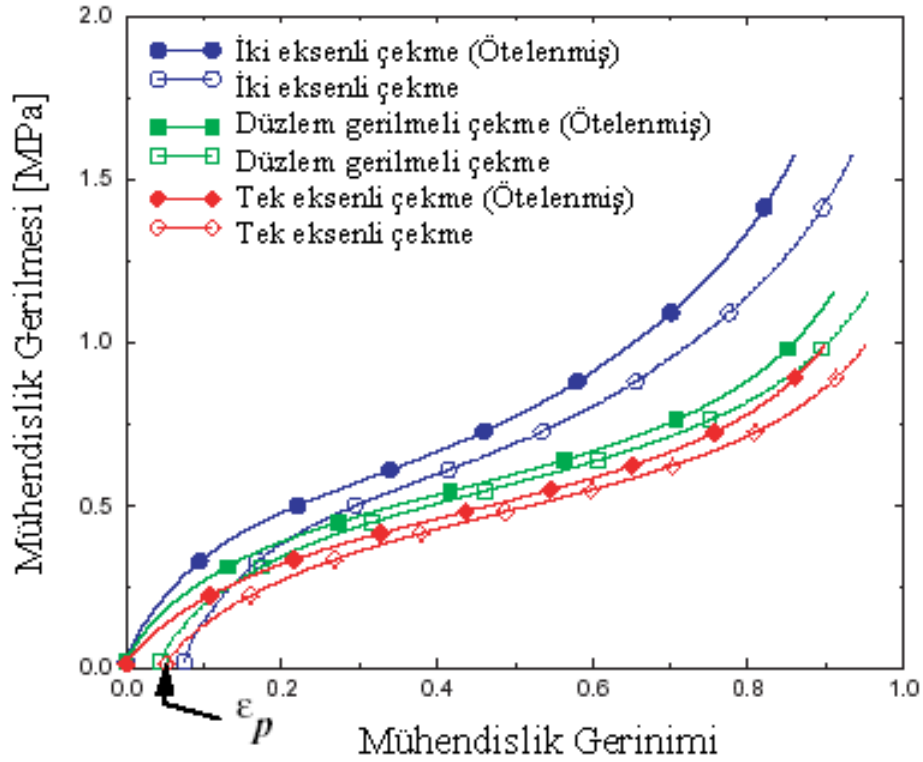
değiştirmeleri arasındaki olası farklılıklar da tez kapsamında ayrıyetten incelendiğinden, ilgili gerinim aralığının ötesi ve berisinin irdelenmesinde kullanılan bu özellik olan ekstrapolasyon devre dışı bırakılacaktır.

Tüm bu denetimlerin ardından %40'lık gerinim için giştirilen matematiksel eğri, %10'luk, %20, %30, %40 ve %50'lik orjinal deneysel sonuç eğrileriyle üst üste konulmalı ve çakışıp çakışmadığına bakılmalıdır. Lakin giriş bölümünde de değinildiğı üzere, farklı gerinimlerdeki deneysel sonuların yükleme eğrileri çakışsa da, boşaltma eğrilerinin çakışmayacağı kauçuğun doğası gereğidir. Bu unsur ileride “sürekli hasar davranışı” başlığı altında ayrıntılı olarak açıklanacaktır. Sonuçların MARC'a girilmesinden önce dikkat edilmesi gereken diğeri bir husus da, yine giriş kısmında değinildiğı üzere, 1. çevrimin yükleme eğrisi sıfır yükte sıfır yer değıştirme kaydederken, 3. çevrimin yükleme eğrisi üzerinde belirli bir yer değıştirmenin kalıyor olmasıdır.(bkz. Şekil 7.2)



Şekil 7.2 Sabit hız ve gerinimde kaydedilen çevrimlerde sıfır yükte denek üzerinde kalan gerinim farklılıkları ve maksimum gerinimde okunan kuvvetin çevrim sayısına bağı olarak azalması.

Bahsedilen ileri çevrimlere ait bu sıfır yükteki yer değıştirme Şekil 4'te öngörüldüğü gibi orijine ötelenmelidir.



Şekil 7.3. Aynı plakadan farklı deney tipleri için kesilmiş deneklerin ham deneysel sonuçları ve sıfıra ötelenmiş halleri

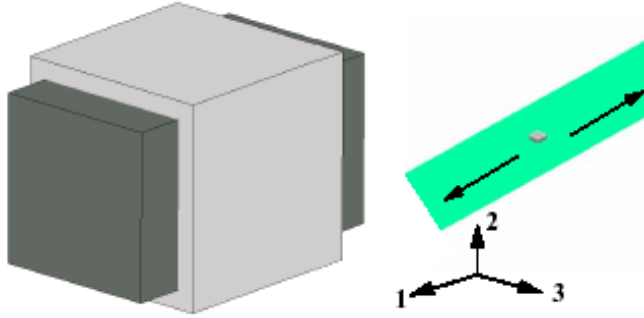
Ayrıca yine giriş bölümünde değinildiği gibi, eğrilerin ötelenmiş hallerinde de Düzlemsel Kayma test sonuçlarının , çift eksenli çekme test sonuçlarına göre daha düşük , tek eksenli çekme test sonuçlarına göre ise daha yüksek gerilme değerleri vermesi gerekmektedir.(bkz. Şekil 4)

8. GİRİLEN DENEYSEL SONUÇLARA MARC TARAFINDAN ÇAKIŞTIRILAN MALZEME MODELİ EĞRİLERİ

Bu bölümde MARC'ın kullandığı matematik modeller içinde, hacim sabitliği kabulüne dayananlardan Neo Hookean, Sabit Mooney Biçim Değiştirmesi, Özgün Mooney Denklemi, Mooney-Rivlin Denklemi, Signiorini Enerji Fonksiyonu, Yeoh Eneji Fonksiyonu, James-Green-Simpson Biçim Değiştirme Eşitliği [2] ile hacimdeki olası değişiklikleri hesaba katan Ogden Model'inin [3] iki katsayılı olanı üzerinde durulacak, ve bu matematik yaklaşımlara ait gerilme denklemlerine türev yoluyla nasıl ulaşıldığı, tek eksenli çekme, düzlemsel kayma ve iki eksenli çekmeye ait gerilme durumları için analitik olarak ayrı ayrı incelenecektir. Bu ayrıntılı

incelemenin amacı, MARC'ın nasıl malzeme karakteristiği atadığını tanımak ve istenirse , Marc tarafından örnek bir deneysel sonuç için atanmış katsayıların yerleştirilmesiyle $\sigma(\epsilon)$ şeklinde ϵ 'ye bağlı bir fonksiyon halini alan malzeme modeli eşitliklerinin, Matlab gibi bir programda eğrilerinin çıkartabilmek, böylelikle MARC'tan alınan eğriler ve deneysel sonuçlarla üst üste çakıştırma olanağı yaratmaktır. Son ölçüt olarak her üç gerilme durumunu da aynı katsayılarla optimum biçimde çıkartabilecek olan matematik model, nihai malzeme modeli olarak atanacaktır.

8.1 Tek Eksenli Gerilme Durumu



Şekil 8.1. Tek eksenli gerilme

8.1.1 Hacim Sabitliğine Dayanan Matematik Yaklaşımlar

$\lambda = 1 + \epsilon$, $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1$ ve tek eksenli gerilme için $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1/\sqrt{\lambda}$ [5]

8.1.1.1 Tek Eksenli Gerilme İçin Neo-Hookean ve Hook ile Kıyası

$$W = (G/2) (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (8.1)$$

$$W = (G/2) (\lambda^2 + (1/\lambda) + (1/\lambda) - 3) \quad (8.2)$$

$$W = (G/2) (\lambda^2 + (2/\lambda) - 3) \quad (8.3)$$

$$\sigma = dW/d\lambda = (G/2) (2\lambda - 2\lambda^{-2}) = G (\lambda - \lambda^{-2}) \quad (8.4)$$

$$\sigma = G ((1 + \epsilon) - (1 + \epsilon)^{-2}) \quad (8.5)$$

Burada ε 'nin $(1/\lambda)$ 'nın 2. dereceden fonksiyonu olan σ , Hook'ta yalnızca $\sigma=E\varepsilon$ idi.

8.1.1.2 Tek Eksenli Gerilme İçin Sabit Mooney Biçim Değiştirme Denklemi [2]

$$W=C_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2 ((1/\lambda_1)^2 + (1/\lambda_2)^2 + (1/\lambda_3)^2 - 3) \quad (8.6)$$

$$W=C_1 (\lambda^2 + (1/\lambda) + (1/\lambda) -3) + C_2 (\lambda^2 + (1/\lambda) + (1/\lambda) -3) \quad (8.7)$$

$$W=C_1 (\lambda^2 + (2/\lambda) - 3) + C_2 (\lambda^2 + (2/\lambda) - 3) \quad (8.8)$$

$$\sigma = dW/d\lambda = 2 C_1 (\lambda - \lambda^{-2}) + 2 C_2 (1 - \lambda^{-3}) \quad (8.9)$$

8.1.1.3 Tek Eksenli Gerilme İçin Orjinal Mooney Denklemi [4]

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (8.10)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 \quad (8.11)$$

$$I_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (\Delta V=0) \quad (8.12)$$

$$W=W(I_1, I_2) \quad [3] \quad (8.13)$$

$$W=C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3) \quad (8.14)$$

8.1.1.4 Tek Eksenli Gerilme İçin Mooney-Rivlin Denklemi [4]

$$W=C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) \quad (8.15)$$

Benzer formülasyonlarından ötürü yalnızca Mooney-Rivlin eşitliği için türev alınacaktır.

$$W= C_{10} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_{01} (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 - 3) \quad (8.16)$$

$$W=C_{10} (\lambda^2 + (2/\lambda) - 3) + C_{01} (2 \lambda + (1/\lambda)^2 - 3) \quad (8.17)$$

$$\sigma = dW/d\lambda = 2 C_{10} (\lambda - \lambda^{-2}) + 2 C_{01} (1 - \lambda^{-3}) \quad (8.18)$$

Tek eksenli gerilme için 8.1.1.2 ile aynı eşitliği vermektedir.

8.1.1.5 Tek Eksenli Gerilme İçin Signiorini Denklemi [2]

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 \quad (8.19)$$

$$W = C_{10} (\lambda^2 + (2/\lambda) - 3) + C_{01} (2\lambda + (1/\lambda)^2 - 3) + C_{20} (\lambda^2 + (2/\lambda) - 3)^2 \quad (8.20)$$

$C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3)$ kısmının türevi daha önce alınmış bulunduğundan yalnızca,

$$\begin{aligned} & d [C_{20} (\lambda^2 + (2/\lambda) - 3)^2] / d\lambda \\ &= 2 C_{20} (\lambda^2 + (2/\lambda) - 3) d [C_{20} (\lambda^2 + (2/\lambda) - 3)] / d\lambda \\ &= 4 C_{20} (\lambda^2 + (2/\lambda) - 3) (\lambda - \lambda^{-2}) \end{aligned} \quad (8.21)$$

$$\sigma = dW/d\lambda = 2 C_{10} (\lambda - \lambda^{-2}) + 2 C_{01} (1 - \lambda^{-3}) + 4 C_{20} (\lambda^2 + (2/\lambda) - 3) (\lambda - \lambda^{-2}) \quad (8.22)$$

8.1.1.6 Tek Eksenli Gerilme İçin Yeoh Denklemi [2]

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3 \quad (8.23)$$

Diğer kısımların türevi daha önce alınmış bulunduğundan yalnızca,

$$\begin{aligned} & d [C_{30} (\lambda^2 + (2/\lambda) - 3)^3] / d\lambda = 3 C_{30} (\lambda^2 + (2/\lambda) - 3)^2 d [(\lambda^2 + (2/\lambda) - 3)] / d\lambda \\ &= 3 C_{30} (\lambda^2 + (2/\lambda) - 3)^2 \cdot 2 C_{10} (\lambda - \lambda^{-2}) \\ &= 6 C_{30} (\lambda^2 + (2/\lambda) - 3)^2 (\lambda - \lambda^{-2}) \end{aligned} \quad (8.24)$$

$$\begin{aligned} \sigma = dW/d\lambda &= 2 C_{10} (\lambda - \lambda^{-2}) + 4 C_{20} (\lambda^2 + (2/\lambda) - 3) (\lambda - \lambda^{-2}) \\ &+ 6 C_{30} (\lambda^2 + (2/\lambda) - 3)^2 (\lambda - \lambda^{-2}) \end{aligned} \quad (8.25)$$

8.1.1.7 Tek Eksenli Gerilme İçin James-Green-Simpson Denklemi [2]

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) + C_{11} (I_1 - 3) (I_2 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3 \quad (8.26)$$

Diğer kısımların türevi daha önce alınmış bulunduğundan

yalnızca,

$$\begin{aligned}
 d [C_{11} (I_1 - 3) (I_2 - 3)] / d\lambda = \\
 = d [C_{11} (\lambda^2 + (2/\lambda) - 3) (\lambda^{-2} + 2\lambda - 3)] / d\lambda \\
 = C_{11} [2(\lambda - \lambda^{-2})(\lambda^{-2} + 2\lambda - 3) + 2(1 - \lambda^{-3})(\lambda^2 + (2/\lambda) - 3)]
 \end{aligned} \tag{8.27}$$

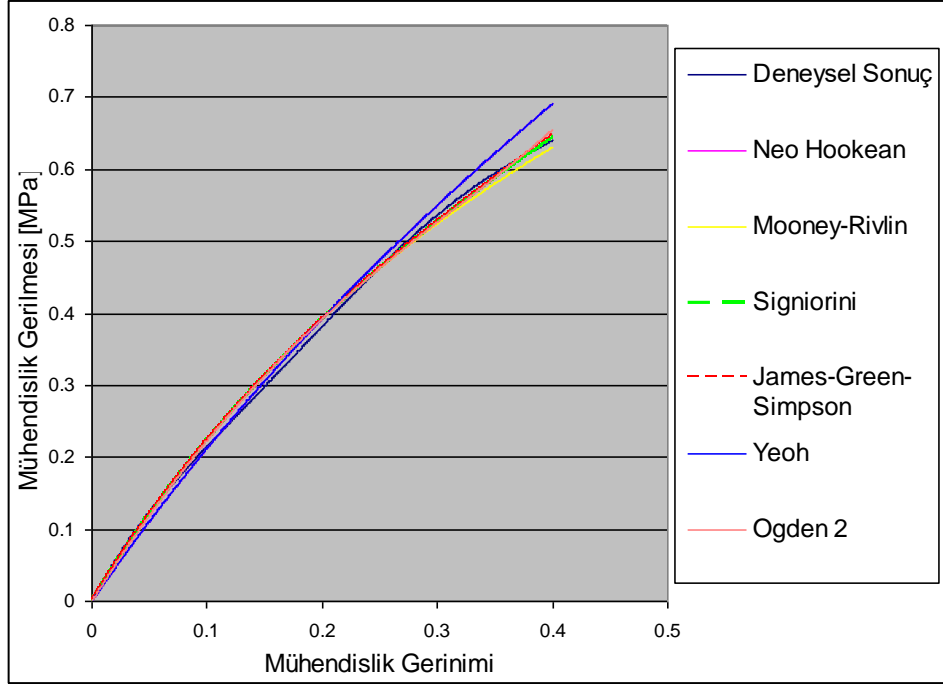
$$\begin{aligned}
 \sigma = dW/d\lambda = & 2 C_{10} (\lambda - \lambda^{-2}) + 2 C_{01} (\lambda - \lambda^{-3}) + C_{11} [2(\lambda - \lambda^{-2})(\lambda^{-2} + 2\lambda - 3) \\
 & + 2(1 - \lambda^{-3})(\lambda^2 + (2/\lambda) - 3)] + 4 C_{20} (\lambda^2 + (2/\lambda) - 3) (\lambda - \lambda^{-2}) \\
 & + 6 C_{30} (\lambda^2 + (2/\lambda) - 3)^2 (\lambda - \lambda^{-2})
 \end{aligned} \tag{8.28}$$

8.1.2 Tek Eksenli Gerilme İçin Hacim Değişimini Hesaba Katan Yaklaşımlar

Bu kapsamda yalnızca 2'şer α ve μ katsayısı içeren Ogen2 modeli incelenecektir. Hacmin değişiminden ötürü $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 1$, λ_i 'ler birbirleri cinsinden ifade edilememektedir. Dolayısıyla aşağıda verilen Ogden eşitliğinin türevinin alınması bulk modülünün deneysel ya da MARC tarafından tayininden sonra, ve deneysel sonuçlardan $J = (V + \Delta V)/V$ skaler değerinin tespitinin ardından, λ_i 'ler arasında bir oran kurulabildiğinde sağlanabilecektir. İki eksenli çekme ve düzlem kayma durumlarında da, bu kısım için aynı açıklama tekrar edilmeyecek, sadece bu bölüme atıfta bulunulacaktır.

8.1.2.1 Tek Eksen İçin Ogden 2 modeli [2]

$$W = \sum_{n=1}^m \left(\frac{\mu_n}{\alpha_n} \right) \left[J^{-\frac{\alpha}{3}} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n}) - 3 \right] + 4.5 K \left(J^{-\frac{\alpha}{3}} - 1 \right)^2 \tag{8.29}$$



Şekil 8.2 Farklı malzeme modellerinin kıyası

Tablo 3 .Şekil 8.2'deki matematik modellerin denklemlerine MARC tarafından atanan modül tensörü bileşenleri, bir başka deyişle C katsayıları

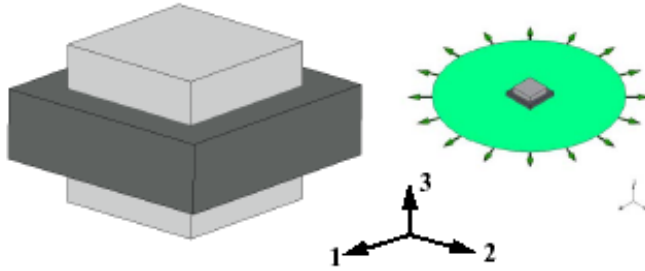
	Neo Hookean	Mooney Rivlin	Signiorini	James- Simp. &Green	Yeoh
C10	0.4623	0.045	0.2912	0.3637	0.437
C01	-	0.438	0.1802	0.1034	-
C11	-	-	-	0*	-
C20	-	-	0*	0*	0*
C30	-	-	-	0.1616	0.42
Çakışma Hatası	2.279	1.242	1.8139	2.011	8.987

Tablo 1'de yıldız işaretli sıfır değerleri daha önce değinilen artı katsayılar yöntemi etkin kılındığı için sıfıra eşit çıkmıştır. Bu özellik devre dışı bırakılsaydı ilgili değerler sıfırdan küçük çıkacak, eğri ilgilenilen gerinim aralığında daha çakışık görünse bile, $d\sigma \cdot d\epsilon < 0$ olacağından kararsız davranış sergileyecekti. Eğrilerdeki

katsayılar sıfırlanınca , eğri kendinden bir ilkel eğriyle aynı formüle sahip olmakta, dolayısıyla kalan katsayıları , grafikleri ve çakıştırma hataları da aynı çıkmaktadır.

Şekil 5'teki Ogden 2 eğrisi için ilgili katsayılar MARC tarafından $\mu_1=47.227, \mu_2=1.58.10^{-5}, \alpha_1=0.0362968, \alpha_2=0.0362968, K=4286.45$ olarak tayin edilmiştir.

8.2 İki Eksenli Gerilme Durumu



Şekil 8.3. İki eksenli gerilme

8.2.1 Hacim Sabitliğine Dayanan Matematik Yaklaşımlar

$\lambda_1.\lambda_2.\lambda_3 = 1$ ve iki eksenli gerilme için $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ ve $\lambda_3 = 1/\lambda^2$ [5]

8.2.1.1 İki Eksenli Gerilme İçin Neo-Hookean ve Hook ile Kıyası

$$W = (G/2) (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (8.30)$$

$$W = (G/2) (\lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^{-4} - 3) \quad (8.31)$$

$$\sigma = dW/d\lambda = (G/2) (4\lambda - 4\lambda^{-5}) \quad (8.32)$$

$$\sigma = dW/d\lambda = 2G (\lambda - \lambda^{-5}) = 2G ((1+\epsilon) - (1+\epsilon)^{-5}) \quad (8.33)$$

Hook'ta yalnızca $\sigma=E\epsilon$ idi.

8.2.1.2 İki Eksenli Gerilme İçin Sabit Mooney Biçim Değiştirme Denklemi

$$W = C_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2 ((1/\lambda_1)^2 + (1/\lambda_2)^2 + (1/\lambda_3)^2 - 3) \quad (8.34)$$

$$W = C_1 (\lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^{-4} - 3) + C_2 (\lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^{-4} - 3) \quad (8.35)$$

$$\sigma = dW/d\lambda = C_1 (4\lambda - 4\lambda^{-5}) + C_2 (-4\lambda^{-3} + 4\lambda^3) \quad (8.36)$$

$$\sigma = dW/d\lambda = 4 (C_1 (\lambda - \lambda^{-5}) - C_2 (\lambda^{-3} - \lambda^3)) \quad (8.37)$$

8.2.1.3 İki Eksenli Gerilme İçin Orjinal Mooney Denklemi

$$W = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3) \quad (8.38)$$

8.2.1.4 İki Eksenli Gerilme İçin Mooney-Rivlin Denklemi

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) \quad (8.39)$$

Yine yalnızca Mooney-Rivlin eşitliği için

$$W = C_{10} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_{01} (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 - 3) \quad (8.40)$$

$$W = C_{10} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3) + C_{01} (\lambda^4 + 2\lambda^{-2} - 3) \quad (8.41)$$

$$\sigma = dW/d\lambda = C_{10} (4\lambda - 4\lambda^{-5}) + C_{01} (-4\lambda^{-3} + 4\lambda^3) \quad (8.42)$$

$$\sigma = dW/d\lambda = 4 (C_{10} (\lambda - \lambda^{-5}) - C_{01} (\lambda^{-3} - \lambda^3)) \quad (8.43)$$

Tek eksenlideki asal eksenlerdeki gerdirme oranlarının ilişkisinden farklı olarak iki eksenlideki $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ve $\lambda_3 = 1/\lambda^2$, bu defa iki eksenli Mooney-Rivlin (dolayısıyla Orjinal Mooney Denklemi de) Sabit Mooney eşitliğiyle aynı kılmıştır (bkz. 8.2.1.2, 8.2.1.3 ve 8.2.1.4'deki sonuçlar.)

8.2.1.5 İki Eksenli Gerilme İçin Signiorini Denklemi

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2$$

$$W = C_{10} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_{01} (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 - 3) + C_{20} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)^2$$

$$W = C_{10} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3) + C_{01} (\lambda^4 + 2\lambda^{-2} - 3) + C_{20} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3)^2$$

Diğer kısımların türevi daha önce alınmış bulunduğundan

yalnızca,

$$d[C_{20} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3)^2] / d\lambda = 2 C_{20} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3) d[(2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3)]$$

$$= 8C_{20} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3) (\lambda - \lambda^{-5}) \quad (8.44)$$

$$\sigma = dW/d\lambda = 4C_{10} (\lambda - \lambda^{-5}) + 4C_{01} (\lambda^3 - \lambda^{-3}) + 8 C_{20} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3) (\lambda - \lambda^{-5}) \quad (8.45)$$

$$\sigma = dW/d\lambda = 4[C_{10} (\lambda - \lambda^{-5}) + C_{01} (\lambda^3 - \lambda^{-3}) + 2 C_{20} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3) (\lambda - \lambda^{-5})] \quad (8.46)$$

8.2.1.6 İki Eksenli Gerilme İçin Yeoh Denklemi

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3 \quad (8.47)$$

$$W = C_{10} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_{20} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)^2 + C_{30} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)^3$$

$$= C_{10} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3) + C_{20} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3)^2 + C_{30} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3)^3 \quad (8.48)$$

Diğer kısımların türevi daha önce alınmış bulunduğundan yalnızca,

$$d[C_{30} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3)^3] / d\lambda = 3C_{30} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3)^2 d[C_{30} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3)] / d\lambda$$

$$= 3C_{30} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3)^2 (4\lambda - 4\lambda^{-5}) \quad (8.49)$$

$$\sigma = dW/d\lambda = 4C_{10} (\lambda - \lambda^{-5}) + 8 C_{20} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3) (\lambda - \lambda^{-5})$$

$$+ 12 C_{30} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3)^2 (\lambda - \lambda^{-5}) \quad (8.50)$$

$$\sigma = dW/d\lambda = 4 (\lambda - \lambda^{-5}) [C_{10} + 2C_{20} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3) + 3C_{30} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3)^2] \quad (8.51)$$

8.2.1.7 İki Eksenli Gerilme İçin James-Green-Simpson Denklemi

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) + C_{11} (I_1 - 3) (I_2 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3 \quad (8.52)$$

$$W = C_{10} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_{01} (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 - 3)$$

$$\begin{aligned}
& + C_{11} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 - 3) \\
& + C_{20} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)^2 + C_{30} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)^3
\end{aligned} \tag{8.53}$$

$$\begin{aligned}
W = & C_{10} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3) + C_{01} (\lambda^4 + 2\lambda^{-2} - 3) + C_{11} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3) (\lambda^4 + 2\lambda^{-2} - 3) \\
& + C_{20} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3)^2 + C_{30} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3)^3
\end{aligned} \tag{8.54}$$

Diğer kısımların türevi daha önce alınmış bulunduğundan yalnızca,

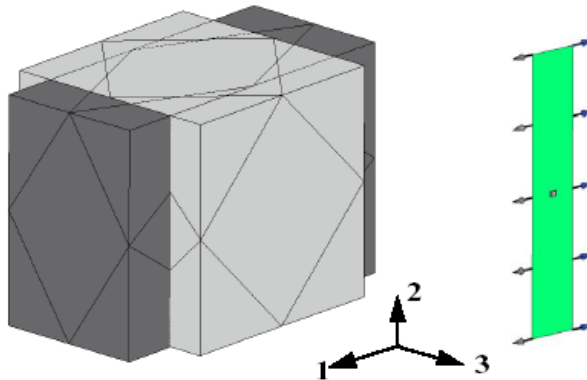
$$\begin{aligned}
d [C_{11} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3) (\lambda^4 + 2\lambda^{-2} - 3)] / d\lambda = \\
= 4 [C_{10} (\lambda - \lambda^{-5}) (\lambda^4 + 2\lambda^{-2} - 3) + (\lambda^3 - \lambda^{-3}) (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3)]
\end{aligned} \tag{8.55}$$

$$\begin{aligned}
\sigma = dW/d\lambda = & 4 [C_{10} (\lambda - \lambda^{-5}) + 2 C_{20} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3) (\lambda - \lambda^{-5}) \\
& + 3 C_{30} (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3)^2 (\lambda - \lambda^{-5}) + C_{01} (\lambda^3 - \lambda^{-3}) \\
& + 4 C_{10} [(\lambda - \lambda^{-5}) (\lambda^4 + 2\lambda^{-2} - 3) + (\lambda^3 - \lambda^{-3}) (2\lambda^2 + \lambda^{-4} - 3)]]
\end{aligned} \tag{8.56}$$

8.2.2 İki Eksenli Gerilme İçin Hacim değişimini hesaba katan yaklaşımlar

Bkz. alt başlık 8.1.2

8.3 Düzlemsel Kayma Durumu



8.3.1 Hacim Sabitliğine Dayanan Matematik Yaklaşımlar

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1$ ve düzlemsel kayma için $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = 1$ ve $\lambda_3 = 1/\lambda$ [5]

8.3.1.1 Düzlemsel Kayma İçin Neo-Hookean ve Hook ile Kıyası

$$W = (G/2) (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) = (G/2) (\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2) \quad (8.57)$$

$$\sigma = dW/d\lambda = (G/2)(2\lambda - 2\lambda^{-3}) = G(\lambda - \lambda^{-3}) \quad (8.58)$$

Hook'ta yalnızca $\sigma = E\varepsilon$ idi.

8.3.1.2 Düzlemsel Kayma İçin Sabit Mooney Biçim Değiştirme Denklemi

$$W = C_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_2 ((1/\lambda_1)^2 + (1/\lambda_2)^2 + (1/\lambda_3)^2 - 3) \quad (8.59)$$

$$W = (C_1 + C_2)(\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2) \quad (8.60)$$

$$\sigma = dW/d\lambda = (C_1 + C_2)(2\lambda - 2\lambda^{-3}) = 2(C_1 + C_2)(\lambda - \lambda^{-3}) \quad (8.61)$$

8.3.1.3 Düzlemsel Kayma İçin Orjinal Mooney Denklemi

$$W = C_1 (I_1 - 3) + C_2 (I_2 - 3) \quad (8.62)$$

8.3.1.4 Düzlemsel Kayma İçin Mooney-Rivlin Denklemi

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) \quad (8.63)$$

Yine yalnızca Mooney-Rivlin eşitliği için

$$W = C_{10} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_{01} (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 - 3) \quad (8.64)$$

$$W = (C_{10} + C_{01})(\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2) \quad (8.65)$$

$$\sigma = dW/d\lambda = (C_{10} + C_{01}) (2\lambda - 2\lambda^{-3}) = 2(C_1 + C_2)(\lambda - \lambda^{-3}) \quad (8.66)$$

8.3.1.5 Düzlemsel Kayma İçin Signiorini Denklemi

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 \quad (8.67)$$

$$W = C_{10} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_{01} (\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 - 3) + C_{20} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)^2 \quad (8.68)$$

$$W = 2 (C_{10} + C_{01}) (\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2) + C_{20} (\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2)^2 \quad (8.69)$$

Diğer kısımların türevi daha önce alınmış bulunduğundan yalnızca,

$$d[C_{20} (\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2)^2] / d\lambda = 2(\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2) d[C_{20} (\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2)] / d\lambda = 4 C_{20} (\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2) (\lambda - \lambda^{-3}) \quad (8.70)$$

$$\sigma = dW/d\lambda = 2(C_1 + C_2)(\lambda - \lambda^{-3}) + 4C_{20}(\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2)(\lambda - \lambda^{-3}) \quad (8.71)$$

$$\sigma = dW/d\lambda = 2(\lambda - \lambda^{-3}) [(C_1 + C_2) + 2 C_{20}(\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2)] \quad (8.72)$$

8.3.1.6 Düzlemsel Kayma İçin Yeoh Denklemi

$$W = C_{10} (I_1 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3 \quad (8.73)$$

$$W = C_{10} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_{20} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)^2 + C_{30} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)^3 \quad (8.74)$$

Diğer kısımların türevi daha önce alınmış bulunduğundan yalnızca,

$$d[C_{30} (\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2)^3] / d\lambda = 6(\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2)^2 (\lambda - \lambda^{-3}) \quad (8.75)$$

$$\sigma = dW/d\lambda = 2(\lambda - \lambda^{-3}) [C_{10} + 2C_{20}(\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2) + 3C_{30}(\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2)^2] \quad (8.76)$$

8.3.1.7 Düzlemsel Kayma İçin James –Green -Simpson Denklemi

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) + C_{11}(I_1 - 3)(I_2 - 3) + C_{20}(I_1 - 3)^2 + C_{30}(I_1 - 3)^3 \quad (8.77)$$

$$\begin{aligned} W = & C_{10}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) + C_{01}(\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 - 3) \\ & + C_{11}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)(\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_1^2 \lambda_3^2 - 3) \\ & + C_{20}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)^2 + C_{30}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3)^3 \end{aligned} \quad (8.78)$$

$$W = (C_{10} + C_{01})(\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2) + (C_{11} + C_{20})(\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2)^2 + C_{30}(\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2)^3 \quad (8.79)$$

Daha önce türevi alınan ifadelerin yardımıyla

$$\sigma = dW/d\lambda = 2(\lambda - \lambda^{-3}) [(C_{10} + C_{01}) + 2(C_{11} + C_{20})(\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2) + 3C_{30}(\lambda^2 + \lambda^{-2} - 2)^2] \quad (8.80)$$

8.3.2 Düzlemsel Kayma İçin Hacim değişimini hesaba katan yaklaşımlar

Bkz. alt başlık 8.1.2

8.4 Sonuçların Yorumlanması

Tablo 3'teki katsayılar, MARC'ın yalnızca tek eksenli gerilme eğrilerine çakıştırmak üzere bulduğu değerlerdi. Oysa üç temel gerilme durumuna ait denklemlerin tamamı türetildikten sonra görülmüştür ki , tek eksenli gerilme için elde edilen katsayılar , aynı zamanda iki eksenli gerilme ve düzlem kayma eşitliklerine de çarpan olarak etkimektedir. Yani MARC, üç temel gerilme durumuna ait eğrilerden yalnızca birine mükemmel çakışma hedefleyip, ona özel katsayılar türetirse , aynı C_{01} ve C_{10} , diğer gerilme durumlarına ait denklemleri de etkilediğinden, diğer gerilme durumuna ait eğrilerde çakışmayan görünümeler ortaya çıkabilmektedir. Bu yüzden MARC, her üç gerilme için ortak ve üçüyle de optimum çakışmaya hizmet edecek katsayılar bulmalıdır. Türev alınarak elde edilen

denklemler çerçevesinde, Şekil 8.2 ve Tablo 3’deki değerlerin güncellenmiş halini, Şekil 8.7 ve Tablo 4’te tekrar değerlendirmek gerekirse.

Tablo 4. 3 Temel Gerilme Durumu İçin Eğri Çakıştırma
A-Pozitif Katsayılar-Sadece Tek Eksenli Deney Sonucu Hedeflenerek
B- Pozitif Katsayılar-3 Gerilmenin Deney Sonuçları Hedeflenerek
C-Negatif Katsayılar- Tek Eksenli Deney Sonucu Hedeflenerek

	Neo Hookean		Mooney Rivlin		Signiorini			James-Simp. &Green		Yeoh	
	A	B	A	B	C	A	B	A	B	A	B
C10	0.46	0.37	0.05	0.37	-0.72	0.29	0.37	0.36	0.37	0.44	0.36
C01	-	-	0.44	0*	-	0.18	0*	0.10	0*	0*	0*
C11	-	-	-	-	0.42	-	-	0*	0*	92.95	3.87
C20	-	-	-	-	1,22	0*	-	0*	0*	-	-
C30	-	-	-	-	-	-	-	0.16	0*	-	-

Tablo 4’deki değerlerin ayrıntısı incelenmesine geçmeden, önce Tablo3’deki halleriyle nasıl bir çakışma performansı gösterdiklerini ve Marc’ın eğrileri nasıl çakıştırdığını daha iyi kavramak adına, 8. bölümde tek eksenli gerilme durumu için çıkartılan formülleri, MatLab programına aşağıdaki gibi girelim , eşitlikleri girerken, gerdirme oranı λ yerine $1+\varepsilon$ girilecektir. Bu durumda aslen gerinim olan ε , elde

edilecek eğrinin x eksenini teşkil edeceğinden, MatLab'a girerken ε yerine tekrar x yazmamız gerekecektir. Dolayısıyla MATLAB formülasyonundaki x'in yer değiştirme değil, birim yer değiştirme yani gerinim (ε) olduğunu hatırlatmakta fayda vardır. Modül tensörü bileşenleri olan C katsayılarını da, eşitliklerdeki ilgili terimlere çarpan olarak atarken, Tablo3' deki değerleri alıp, aşağıda verildiği üzere, MATLAB'in verdiği grafiklerdeki çakışma rejimlerini izleyelim.

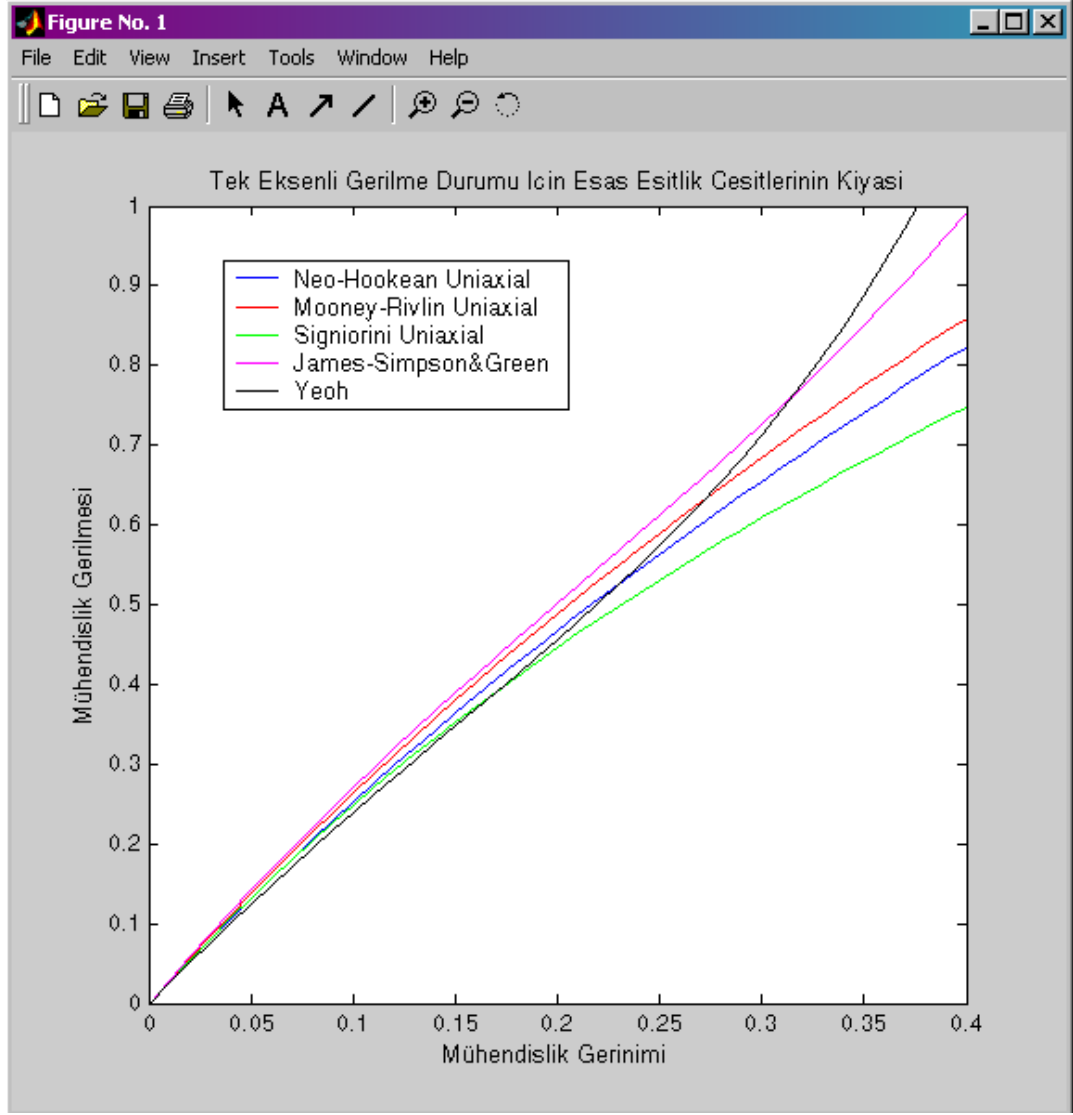
```
i=0;
for x=0:0.01:0.4
    i=i+1;
    for y=-25:1:5
        xa(i)=x;
        y1(i)=2*0.4623*((1+x)-(1/((1+x)^2)));
        y2(i)=2*(0.045*((1+x)-((1+x)^(-2)))+0.438*((1+x)-((1+x)^(-2))));
        y5(i)=2*0.2912*((1+x)-((1+x)^(-2)))+2*0.1802*((1+x)-((1+x)^(-3)))+4*0*((((1+x)^2))+2*((1+x)^(-1)))-3)
            *((1+x)-((1+x)^(-2)));
        y6(i)=2*0.3637*((1+x)-((1+x)^(-2)))
            +2*0.1034*((1+x)-((1+x)^(-3)))+0*(2*((1+x)-((1+x)^(-2)))*((1+x)^(-2))+2*((1+x)-3)+2*((1+x)^(-3))
            *((1+x)^2))+2*((1+x)^(-1)))-3)+4*0*((1+x)^2))+2*((1+x)^(-1)))-3)*((1+x)-((1+x)^(-2)))+6*0.1616*
            (((1+x)^2))+2*((1+x)^(-1)))-3)^2*((1+x)-((1+x)^(-2))));
        y7(i)=2*0.437*((1+x)-((1+x)^(-2)))-4*0*(8*((1+x)-16*((1+x)^(-5))+24*((1+x)^(-3))-12)
            +6*0.42*((((1+x)^2))+2*((1+x)-3)^2)*((1+x)-((1+x)^(-2))));

    end
end
b=-10:1:10;
c=-10:1:10;
bl=0*c;
cl=0*b;
plot(xa,y1,'b',xa,y2,'r',xa,y5,'g',xa,y6,'m',xa,y7,'k')

xlabel('Mühendislik Gerinimi')
ylabel('Mühendislik Gerilmesi')
title('Tek Eksenli Gerilme Durumu İçin Esas Esitlik Cesitlerinin Kıyası')
legend('Neo-Hookean Uniaxial','Mooney-Rivlin Uniaxial','Signiorini Uniaxial','James-Simpson&Green','Yeoh')
axis([0 0.4 0 1])
```

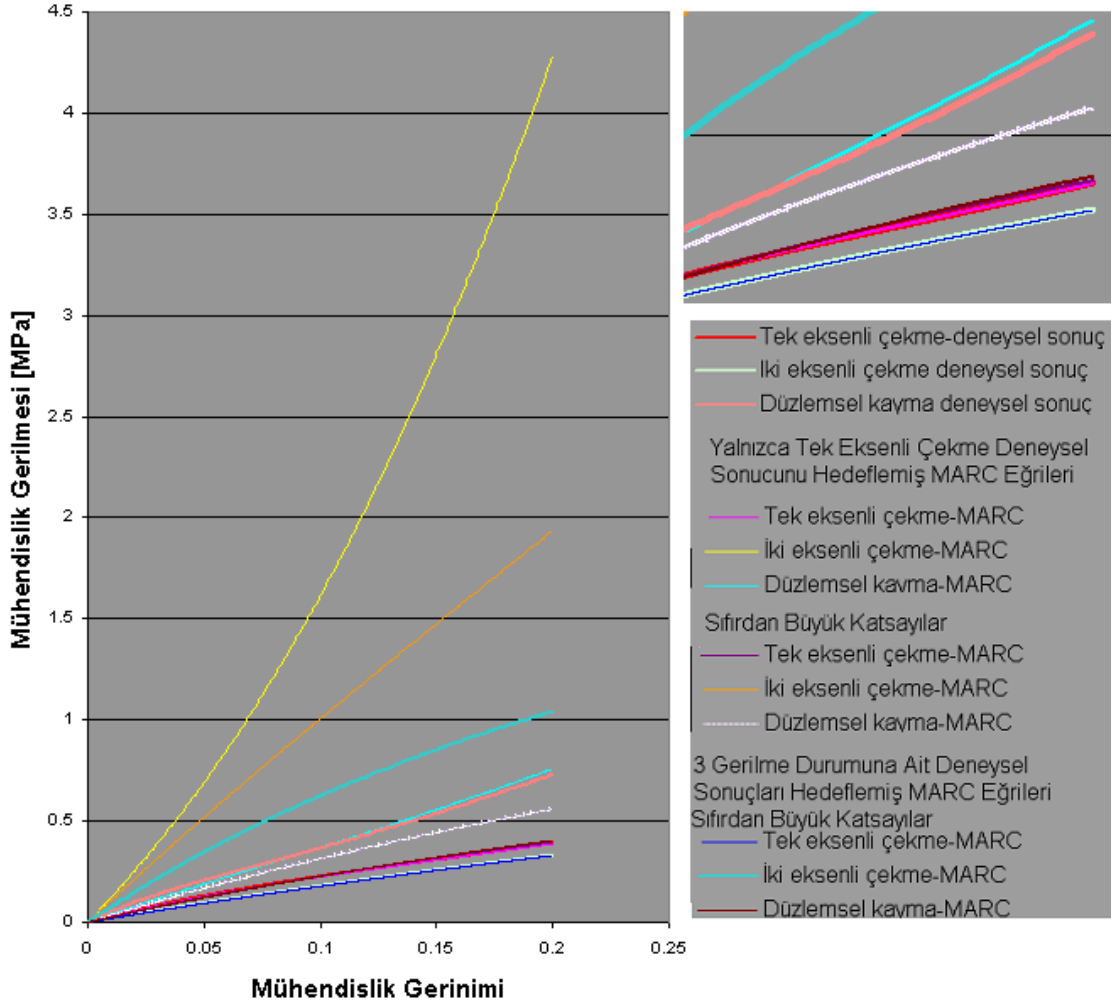
Şekil 8.5 Matlab Program Satırları

Bu grafiğin görünümü aşağıda verildiği gibi olacaktır.



Şekil 8.6 Matlab çıktı grafiği

Diğer yandan Tablo4’ de yeralan ve belirtilen doğrultuda güncellenmiş katsayılardan, modül tensörü bileşenleri hem sıfırdan küçük, hem de sıfırdan büyük katsayılar için mevcut olan, ve en düşük yakınsama hatasından , oldukça yüksek bir yakınsama hatasına kadar geniş bir çakışma rejimi aralığı sergilediğinden, Signorini modeli için türetilmiş olanları seçilmiş ve bu doğrultuda sadece kıyas amaçlı olarak, malzeme modeli çakıştırmanın , hem sadece tek eksenli gerilme sonuçları, hem de her üç temel gerilme durumu için hedeflendiği modül tensörü bileşenleri kullanılarak çizilen eğriler şekil 8.7’de verilmiştir.

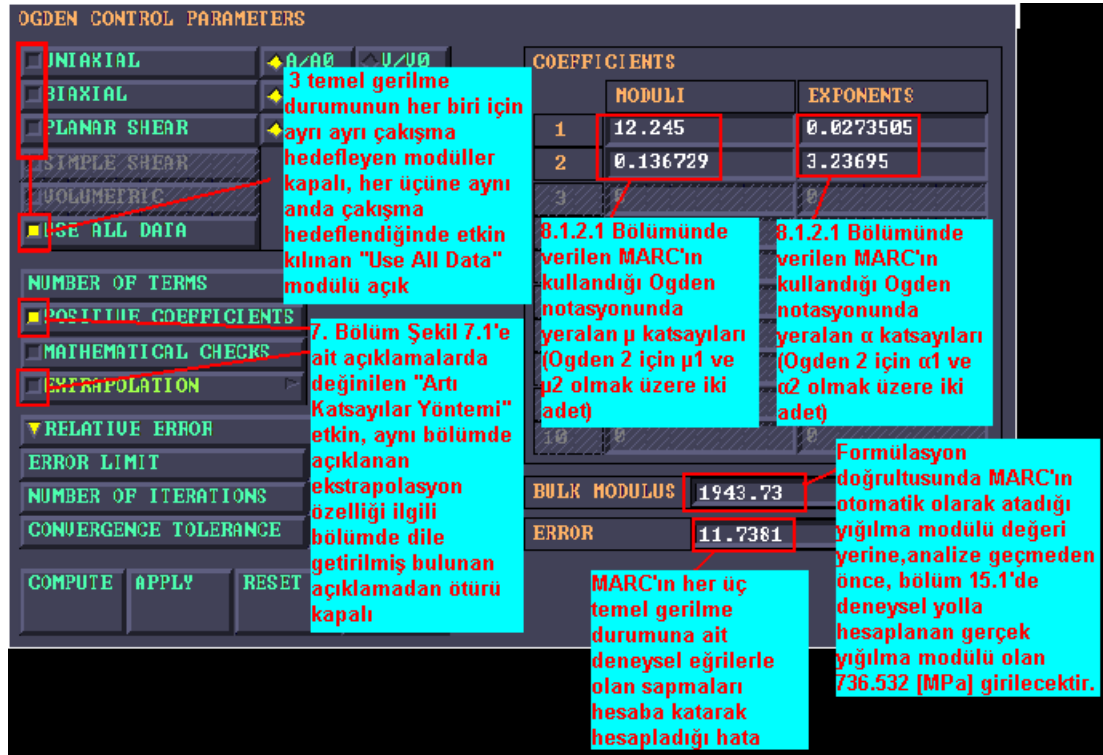


Şekil 8..7. %20 gerinimdeki deneysel sonuçlar için farklı MARC seçenekleri kullanılarak geliştirilmiş Signiorini eşitliklerine ait eğriler.

9. Nihai Malzeme Modelinin Tayini

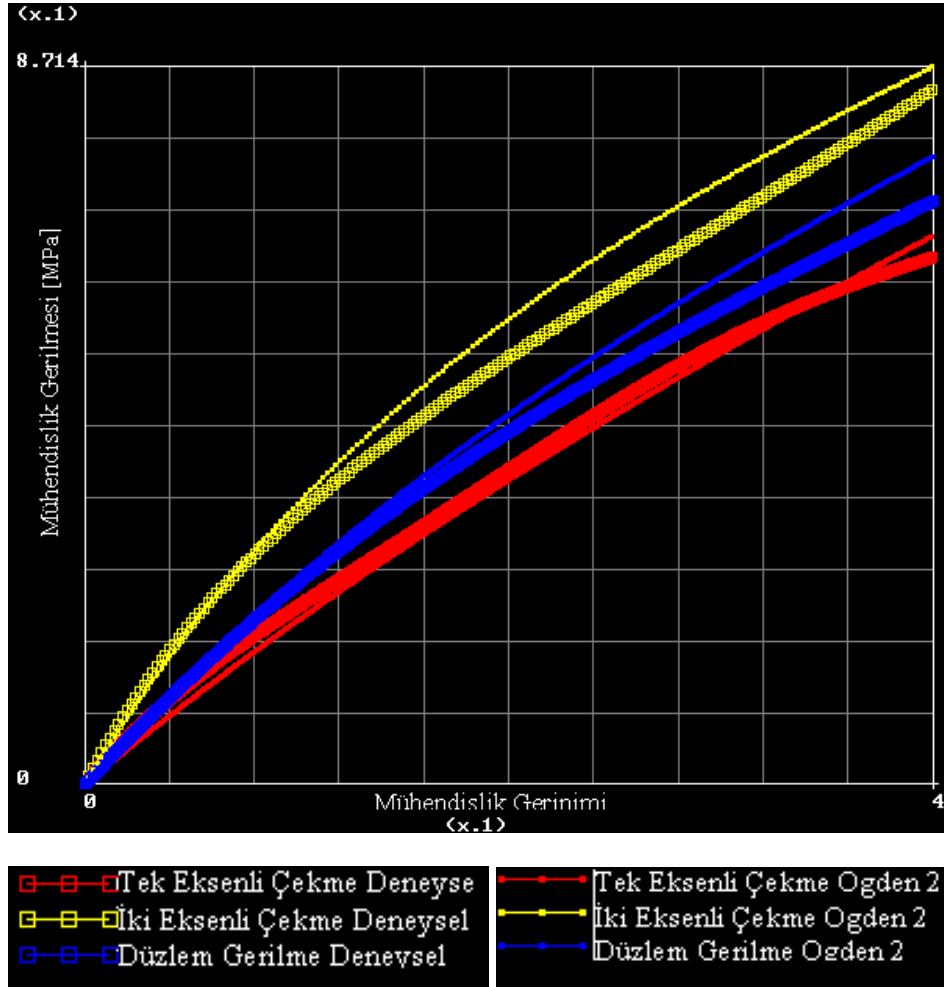
Malzeme modeli olarak %40'lık gerinimdeki 3 gerilme durumu için de çakışma performansı Şekil 10'da verilen Ogden 2 modeli atanmıştır. Bu seçimin yapılması esnasındaki ayrıntılara değinilecek olursa, %10'luk, %20'lik, %30'luk, %40'lık ve %50'lik gerinimler için (toplam 5 farklı değışken), 8. Bölümde türevleri alınan malzeme modellerinden Neo Hookean , Mooney<2> (Mooney Orijinal Notasyonu C_{10} ve C_{01}) , Mooney<3> (Mooney-Rivlin Notasyonu, C_{10} ve C_{01} 'e ek olarak C_{11}) , Yeoh , Signiorini , 2. dereceden biçim değıştirme modeli (C_{10} , C_{01} , C_{11}, C_{20}) , 3. dereceden biçim değıştirme modeli (James-Green&Simpson) (C_{10} , C_{01} , C_{11}, C_{20} ve C_{30}) 'nin yanı sıra Ogden 2 ve Ogden 3 malzeme modelleri için (toplam 9 farklı değışken) , tek eksenli gerilme, iki eksenli gerilme, düzlem kayma gerilmesi deney ayrı ayrı çakışmanın hedeflendiğı ve her üçüne (3R olarak gösterilecek) toplu

halde çakışmanın hedeflendiği (3+1 toplam 4 farklı değişken) ve bu değişkenlerin sıra ayrımı gözetmeyen kombinasyonu hesaplanacak olursa , nihai malzeme modeli $5 \times 4 \times 9 = 180$ farklı malzeme çakıştırma denemesinin ardından tayin edilmiştir ki bu 180 nihai malzeme modeli adayının ilgili hata katsayıları ve deneysel verilerle üst üste çakışmış halleri EK A’da verilmiştir. EK A’nın daha iyi değerlendirilebilmesi adına, bahsi geçen bu 180 adaydan, nihai malzeme modeli olarak seçilen adayın çakışma performansının sergilendiği ilgili MARC penceresi aşağıda verilmiştir.



Şekil 9.1 Nihai malzeme modeli olarak seçilen Ogden 2 malzeme modeline ait çakışma performansının sergilendiği ilgili MARC penceresi

Aşağıda yeralan Şekil 9.1’de ise 180 aday arasından seçilen her üç gerilme durumu için ortak modül tensörü bileşenlerinin atandığı nihai malzeme modeline (Ogden 2) ait eğrinin, üç gerilme durumuna ait deneysel sonuçlarla çakışma rejimi verilmiştir.



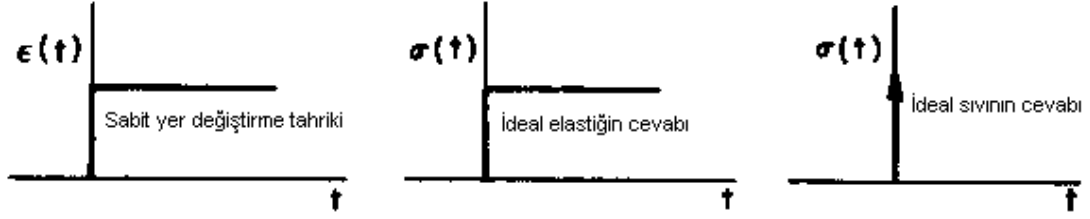
Şekil 9.2. Üç temel gerilme durumu deneysel sonuçları ve üçü nü de sağlayan ortak katsayılarla çakıştırılmış Ogden 2 malzeme modeline ait eğriler.

10. Viskoelastisite

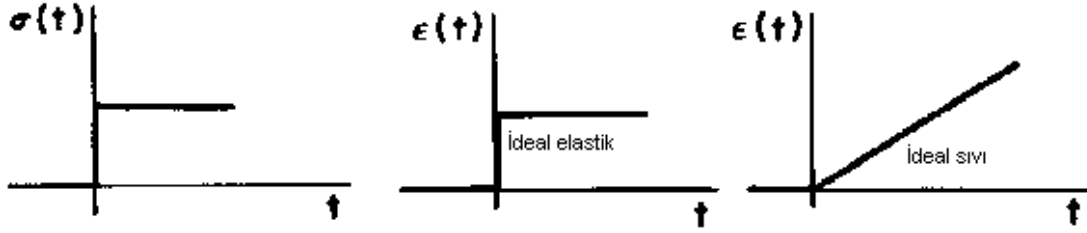
Mükemmel elastik biçim değiştirme ve mükemmel viskoz akış, sadece belirli sınırlandırma ve kabuller dahilinde, ve ancak belirli yaklaşıklıklarla yakınsanabilen idealizasyonlardır. Gerçekte ise malzeme gördüğü mekanik etkiye cevaben yaşadığı biçim değiştirme ya da uyguladığı gerilmeyi, mekanik tahrikin belli bir değere kadar çıkıp orada sabitlendiği andan itibaren, sabit bir cevap olarak sürdüremez ve yapı belleğindeki bir denge değerine doğru süzülerek yakınsar. Bu bağlamda zaman, bir malzemenin ne kadar elastik, ne kadar viskoz olduğunun ayrımında ölçüt teşkil etmeye başlar,örneğin katı cisimler uygulanan mekanik etki karşısında, etki bir değerde sabitlenir sabitlenmez, verdikleri cevabı da çok kısa bir süre sonucunda belirli sabit bir değere oturturlar ve etki devam ettikçe, çok uzun bir gözlem süresi boyunca dahi, cevabın da ilgili değerinde sabit kaldığı görülür ve tahrik sabit

değerde süreğini sürdükçe öncesi durumlarına geri dönemez kabul edilirler, ideal sıvı ise, mekanik tahrik çok yüksek frekanslı değilse, tahrik belli bir değere erişip o değere sabitlendikten hemen sonra verdikleri cevabı sıfıra indirirler ve tahrik öncesi durumlarına ani bir hızla geri dönerler. Tahrik, kuvvet cinsinden ise cevap yer değiştirmedir, ki tahrik ve sonrasındaki tahrik öncesi konumuna dönme eğilimine ‘sürünme davranışı’ ve bu eğilimin bir süre boyunca gözlemlenmesine dayanan teste sürünme testi denir. Tahmin edilebileceği gibi tahrik yer değiştirme ve bunun belli bir değerde sabitlenmesinden oluşuyorsa, buna verilen cevabın kuvvet olacaktır (ya da gerilme) , ve belirli bir gözlem süresi boyunca ne ilk çıktığı kuvvet değerinden, sıfır değerine geri dönme açlığı ve bu yolda kararlı bir değere oturma rejimine ‘relaksasyon’ ve sabit ve süregelen yerdeğiştirme tahriki altında , belirli bir süre zarfında bu eğilimin gözlemlendiği teste de relaksasyon testi denir.

Bir cismin ne kadar elastik ve ne kadar viskoz olduğu yargısında zamanın ölçüt teşkil ettiğinden bahsetmiştik. Örneğin cam kısa bir gözlem süresi için elastik, ancak on yıllar mertebesindeki bir gözlem süresi zarfında bir miktar viskozdur. Bir sıvı frekansı aşırı yüksek olmayan sabit değerde ve süregelen bir yer değiştirme tahriki maruz kalsın, tahrik değerine ulaşarak sabitlendiği anı takip eden ve sıvının yeniden sıfır kuvvet konumuna geri döndüğü o kısacık zaman dilimine t_{geri} diyecek olursak, bu olayı gözlemlemeye 10000s boyunca devam ettiğimiz deney süresinde t_{den} dersek, bunların birbirine oranı $N_D = t_{geri} / t_{den}$ oranı Deborah sayısı olarak anılır ki bu ideal sıvı için sıfıra yakınsar, ideal katı içinse t_{geri} , 10000s olan t_{den} in çok çok sonrasında bile sıfır kuvvete erişmemiş olacağından, ve bir gün erişeceği düşünülse de bunun gerçekleşeceği t_{geri} zamanının t_{den} ‘e göre ölçülemez mertebede büyük olduğu aşıkarak kabul edildiğinden, N_D ideal katılar için sonsuza ıraksar. İşte bu N_D değerinin, sıfır ve sonsuz değerleri değil de, t_{geri} ile t_{den} in kıyaslanabileceği makul değerler aldığı malzemelere *viskoelastik* malzemeler denir. Gerçek katıların ve sıvıların sürünme ve relaksasyon testlerindeki cevaplara geçmeden önce, ideal katı ve sıvıların bu testler altında kaydedecekleri düşünülen cevapları aşağıda verilmiş Şekil 10.1 ve Şekil 10.2 üzerinde inceleyelim.

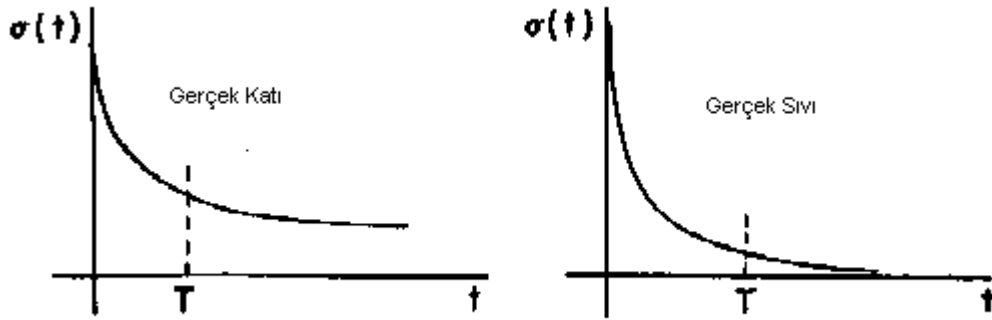


Şekil.10.1 Sabit değerde ve süreğen yer değiştirme tahriki altında ideal sıvı ve katının gerilme cevabının zamana bağlı değişimi (Relaksasyon davranışı)



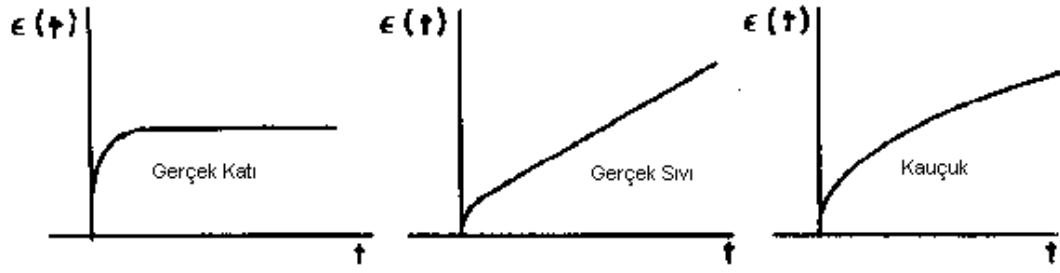
Şekil.10.2 Sabit değerde ve süreğen yer kuvvet (ya da gerilme) tahriki altında ideal sıvı ve katının yer değiştirme cevabının zamana bağlı değişimi (Sürünme davranışı)

Gerçek katı ve sıvıların relaksasyon davranışı ise aşağıdaki gibi olur.



Şekil 10.3. Sabit değerde ve süreğen yer değiştirme tahriki altında gerçek sıvı ve katının gerilme cevabının zamana bağlı değişimi.

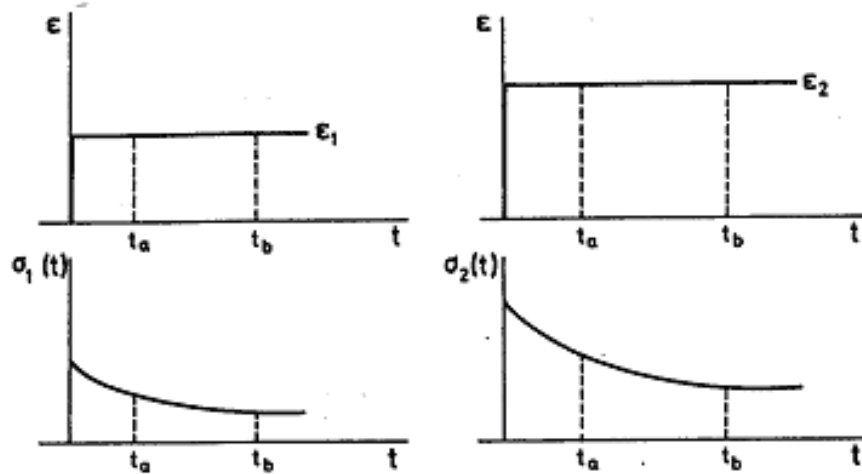
Diğer yandan gerçek katı ve sıvıların sabit süreğen yük altında yer değiştirme cevaplarının zamana bağlı sergilediği rejim olarak sürünme davranışıyla aşağıdaki şekil 10.4’de verildiği gibidir.



Şekil 10.4. Sabit değerde ve süregelen yer kuvvet (ya da gerilme) tahriki altında gerçek katı, gerçek sıvı ve viskoelastik malzemenin yer değiştirme cevabının zamana bağlı değişimi

10.1 Viskoelastisite - Kuramsal Altyapı

10.1.1 Statik Viskoelastisite Kuramsal Altyapı



Şekil 10.5 Çok küçük gerinimlere haiz doğrusal kayma relaksasyonu testleri için basamak fonksiyonu olarak uygulanan kayma gerinimi tahrikleri ve alınan kayma gerilmesi cevapları

10.1.1.1 Kayma ve Yığılma Relaksasyon Modülleri

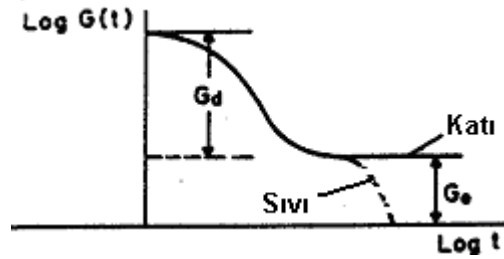
Çok küçük gerinimler söz konusu olduğunda Şekil 10.5'te görülen gerilme-gerinim ilişkileri için, doğrusal malzemelerde geçerli olduğunun altını çizerek, aşağıda yeralan ifadeler yazılabilir

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_1(t_a)}{\epsilon_1} &= \frac{\sigma_2(t_a)}{\epsilon_2} = G(t_a) \\ \frac{\sigma_1(t_b)}{\epsilon_1} &= \frac{\sigma_2(t_b)}{\epsilon_2} = G(t_b) \\ G(t_a) &\neq G(t_b)\end{aligned}\tag{10.1}$$

ki bu ifadede yeralan $G(t)$ relaksasyon modülüdür. Katı cisimlerde zaman ekseninde ilerledikçe kayma gerilmesi cevabı azalan bir ivmeyle düşüş eğilimindedir ve bu düşüş nihai relaksasyon modülü değeri G_e 'ye ulaşıncaya kadar devam eder.

$$G(t) = G_e + G_d \Phi(t) \quad (10.2)$$

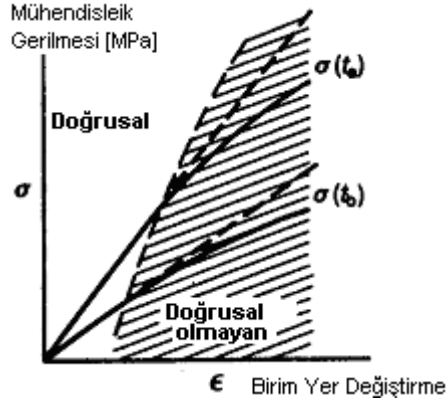
Yukarıdaki ifadede yeralan $G_e = \sigma_\infty / \varepsilon$ olup, $\Phi(t)$ normalize edilmiş sürekli azalan bir fonksüyondur, ki $t=0$ için $\Phi(t)=1$ ve $t=\infty$ için $\Phi(t)=0$ değerlerini almaktadır. $G(t)$ 'nin sıvılar ve katılar için zamana bağlı değişimi aşağıda yeralan şekil 10.7'de, logaritmik eksenlerde verilmiştir.



Şekil 10.6 Logaritmik eksenlerde relaksasyon modülü $G(t)$ 'nin sıvılar ve katılar için zamana bağlı değişimi

Eğer viskoelastik kütle her yönden yer değiştirmeye zorlanıyorsa (p kadar bir hidrostatik basınç karşılığında kaydedilecek bir yereğiştirmenin, doğrudan yerdeğiştirme tahriki olarak uygulandığını farzederek) gerilme ve gerinim tensörlerinin köşegenlerinde yeralan bileşenler sıfırdan farklı değerler alırlar ve uygulanan yegane yükleme buysa, gerilme ve gerinim tensörlerinin köşegenlerinde yeralan bileşenler $\gamma_{11}=\gamma_{22}=\gamma_{33}$ ve $\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma_{ii}=-p$ olur. Aşağıdaki eşitlikte yeralan $p(t)$ hidrostatik basıncın, bahsedilen her yönde uygulanan yer değiştirme tahriki karşısında alınan gerilme cevabının zamana bağlı değişimi ve $\Delta = (V-V_0)/V_0$ hacimsel sıkışma miktarı olmak üzere, aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\sigma_{ii}(t) = -p(t) = 3K(t)\gamma_{ii} = K(t)\Delta \quad (10.4)$$



Şekil 10.7 Doğrusal bölgeden, doğrusal olmayan bölgeye, viskoelastik katı için bir başka deyişle çok küçük yer değiştirmelerden büyük yer değiştirmelere geçişte , şekil 10.5'te verilmiş $\sigma(t_b)$ ve $\sigma(t_a)$ gerilmeleri arasındaki farkın, artan birim yer değiştirmeler karşısındaki değişimi

Diğer yandan aşağıda ifadesi verilen yığılma relaksasyon modülü $K(t)$ de zamana bağlı olarak azalan ivmeyle düşüş gösteren bir fonksüyondur.

$$K(t) = K_e + K_d \Phi'(t) \quad (10.5)$$

ki bu ifadede yeralan $\Phi'(t)$ de daha önce değinilen $\Phi(t)$ ile aynı özelliklere sahip bir fonksüyondur. $H(t)\epsilon_{11}$ gibi tek eksenli bir çekme yer değiştirmesi tahriki karşısında kaydedilen gerilmenin zamana bağlı değişimi aşağıdaki gibi ifade edilir

$$\sigma_{11}(t) = E(t)\gamma_{11} \quad (10.6)$$

ki bu ifadede yeralan $E(t)$ çekme relaksasyon modülü olarak anılır ve

$$E(t) = E_e + E_d \Phi''(t) \quad (10.7)$$

biçiminde bir eşitlikle ifade edilir, buna mukabil yukarıdaki ifadede yeralan $\Phi''(t)$ de daha önce değinilen $\Phi(t)$ ile aynı özelliklere sahip bir fonksüyondur. Viskoelastik sıvılar için $E=0$ olacağı hatırlatılmalıdır.

10.1.1.2 Kayma ve Yığılma Sürünmesi Uyum Fonksüyonları

Kaynağı relaksasyon kavramıyla aynı, yani viskoelastisite olan sürünme ise, bu defa sabit bir gerilmenin basamak fonksüyonu olarak uygulanması karşısında

kaydedilen yerdeğiştirme cevabının zamana bağılı olarak azalan bir ivmeyle artmakta olan bir fonksiyon eğrisi çizmesi anlamına gelmektedir. Bu durumdaysa, $H(t)\sigma$ gibi çok küçük gerinimler yaratacak bir kayma gerilmesinin basamak fonksiyonu olarak uygulanması karşısında kaydedilecek kayma gerinimi ve birim yer değiştirme sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\gamma(t) = \frac{J(t)}{2} \sigma, \quad \varepsilon(t) = J(t) \sigma \quad (10.8)$$

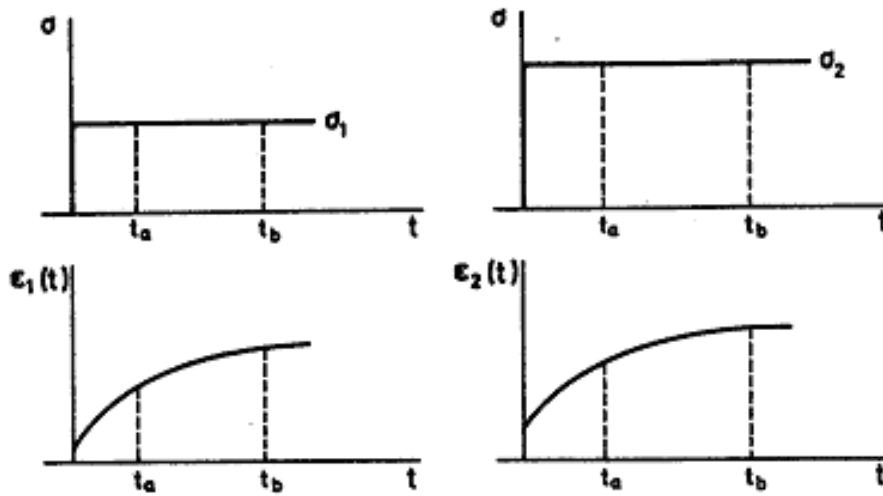
ki bu ifadede yeralan $J(t)$ kayma uyum fonksiyonudur ve aşağıda yeralan eşitlikler dikkate alındığında, uygulanan sabit gerinim karşısında, kaydedilen gerinimin zamana bağılı değişimiyle doğru orantılı olduğundan, kayma uyum fonksiyonu $J(t)$ de zamana bağılı olarak azalarak artan bir eğri çizecektir

$$\frac{\varepsilon_1(t_a)}{\sigma_1} = \frac{\varepsilon_2(t_a)}{\sigma_2} = J(t_a) \quad (10.9)$$

$$\frac{\varepsilon_1(t_b)}{\sigma_1} = \frac{\varepsilon_2(t_b)}{\sigma_2} = J(t_b) \quad (10.10)$$

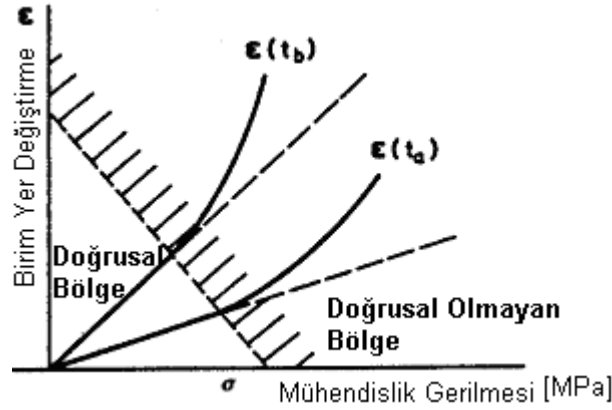
$$J(t_a) \neq J(t_b)$$

ilgili eşitliklerde yeralan σ_1 ve σ_2 , aşağıda yeralan şekil 10.8’de görülebileceği üzere, değerleri farklı şiddetlerde basamak fonksiyonu olarak uygulanmış, çok küçük gerinimler yaratacak kayma gerilmeleri ve $J(t_a)$ ve $J(t_b)$ de sürünme uyum fonksiyonunun farklı anlarda kaydedilmiş değerleridir.



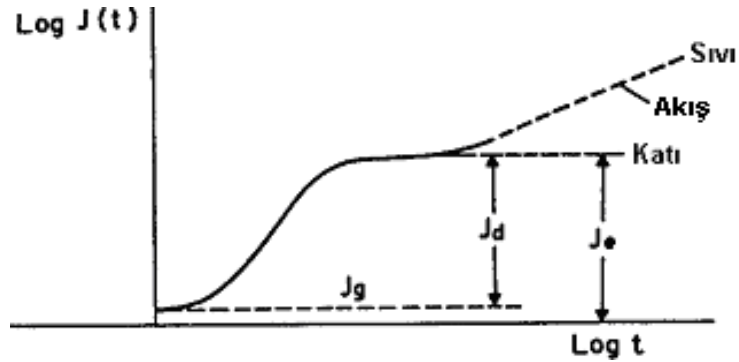
Şekil 10.8 Doğrusal bölgede kalacak şekilde, çok küçük gerinimler yaratacak farklı şiddetlerdeki kayma gerilmeleri σ_1 ve σ_2 ‘in basamak fonksiyonu olarak uygulanması karşısında kaydedilen kayma gerinimlerinin zamana bağılı değişimleri.

Verilen ifadeleri yazarken, doğrusal bölgede kalındığına dair sıkça yapılan uyarıların ardından, doğrusal olan bölgeden, doğrusal olmayan bölgeye geçişte , şekil 10.8’de zamana bağlı değişimi verilen $\epsilon(t_a)$ ve $\epsilon(t_b)$ lerin, artan tahrik gerinimi boyunca nasıl bir değişim sergiledikleri aşağıda yeralan şekil 10.9’da verilmiştir.



Şekil 10.9 Doğrusal olan bölgeden, doğrusal olmayan bölgeye geçişte , şekil 10.8’de zamana bağlı değişimi verilen $\epsilon(t_a)$ ve $\epsilon(t_b)$ lerin, artan tahrik gerinimi boyunca sergiledikleri değişim.

Aşağıda yeralan Şekil 10.10’da ise, katı ve sıvılar için sürünme uyum fonksiyonunun zamana bağlı değişimi, her iki niceliğin de logaritması alınmış değerlerinin sırasıyla dikey ve yatay eksenleri oluşturduğu bir grafik gösterimle verilmiştir.



Şekil 10.10 Logaritmik eksenlerde katı ve sıvılar için sürünme uyum fonksiyonunun zamana bağlı değişimi.

Doğrusal bölgedeki ifadelerinden farklı olarak, doğrusal olmayan bölgede sürünme uyum fonksiyonunun ifadesi katılar için

$$J(t) = J_g + J_g \Psi(t) \quad (10.11)$$

biçiminde yazılır ki bu ifadede yeralan $\psi(t)$ normalize edilmiş azalan ivmeyle sürekli artan bir fonksüyondur, ki $t=0$ için $\psi(t)=0$ ve $t=\infty$ için $\psi(t)=1$ değerlerini almaktadır, öte yandan doğrusal olmayan bölgede sürünme uyum fonksiyonunun ifadesi sıvılar için

$$J(t) = J_g + J_d \Psi(t) + \frac{t}{\eta} \quad (10.12)$$

olup bu ifadede yeralan η viskozitedir. Bu veriler ışığında J_g camsı (Hookean) sürünme uyumu ve J_d de en yüksek elastik entropi sürünme uyumu olmakla beraber, aşağıdaki ifadede yeralan

$$J_e = J_g + J_d \quad (10.13)$$

J_e ise biçim değiştirmesine maruz kalmış elastik sistemin biriktirebileceği en yüksek elastisitenin bir ölçütüdür. Yanısıra viskozite η ise, akış esnasında polimerde kayba uğrayacak (dissipe olacak) en yüksek enerji miktarıyla ilişkilidir. Uluslararası Reoloji Topluluğu Komitesi katılar için J_e 'nin “denge durumu sürünme uyumu” (equilibrium compliance) ve sıvılar için de J_e 'nin “durağan-durum sürünme uyumu” (steady-state compliance) olarak adlandırılmasını tavsiye etmektedir. ([9] sf. 206)

Sabit bir p değerindeki hidrostatik basıncın basamak fonksiyonu olarak uygulandığı bir cisim içinse, cevap olarak kaydedilecek gerinme tensörünün zamana bağlı değişim gösterecek olan trası, aşağıdaki ifadeyle yazılabilir

$$\Delta(t) = -pB(t) \quad (10.14)$$

ki bu ifadede yeralan $B(t)$ yığılma sürünmesi uyum fonksiyonu olarak anılmaktadır. $J(t)$ 'nin , $0 < t < \infty$ aralığında belirgin değişimler kaydedebilmesine karşın, $B(t)$ aynı zaman aralığında, daha az değişimler sergilemektedir. $B(t)$ 'yi sürünme uyum fonksiyonundakine benzer bir yaklaşımla aşağıdaki gibi ifade edecek olursak

$$B(t) = B_g + B_d \Psi''(t) \quad (10.15)$$

ki bu ifadede yeralan $\Psi''(t)$, (10.11) ifadesinde gösterilişinin ardından özellikleri açıklanan $\psi(t)$ ile özdeş bir fonksüyondur. Diğer yandan $\sigma_{11}H(t)$ gibi bir çekme gerilmesinin basamak fonksiyonu şeklinde uygulandığı cismin cevabı aşağıdaki ifadeyle verilecek olursa

$$\epsilon_{11}(t) = D(t)\sigma_{11} \quad (10.16)$$

bu ifadede yeralan $D(t)$ nin çekme sürünmesi uyum fonksiyonu olarak anıldığının altı çizilmelidir, ki $D(t)$ bu kayma sürünmesi uyum fonksiyona benzer bir biçimde aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir.

$$D(t) = D_g + D_d \psi'(t) + \frac{t}{\eta_L} \quad (10.17)$$

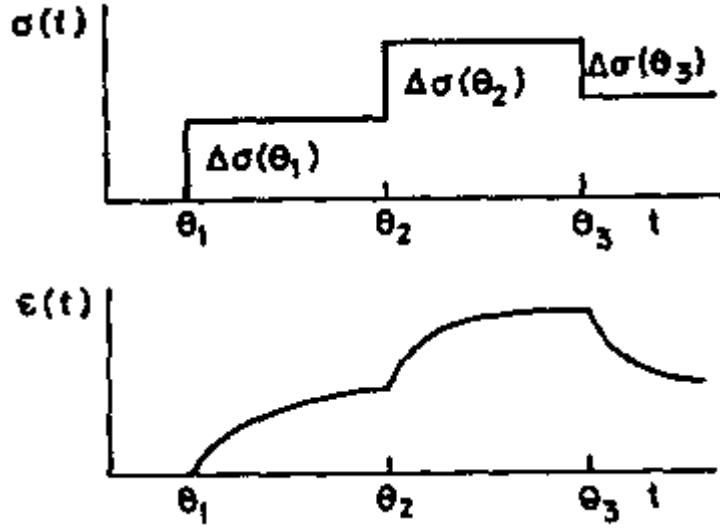
ki bu ifadede yeralan D_g ,Hookean katkısı (Hookean contribution [9] sf. 207 eşitlik 5.21), η_L boyca uzamaya dair viskozite (elongational viscosity [9] sf. 207 eşitlik 5.21) ve $\psi'(t)$ ise, (10.11) ifadesinde gösterilişinin ardından özellikleri açıklanan $\psi(t)$ ile özdeş bir fonsüyondur.

10.1.1.3 Boltzmann Üstüste Ekleme Prensibi Sürünme Testlerindeki Uygulaması

10.1.1.3.1 Ayrık Biçim

Çeşitli yüklemelere maruz kalan viskoelastik sistemde hasıl olan entropi değişimlerinden ötürü, yükleme karşısında kaydedilmiş bulunan cevapların viskoelastik sisteme olan etkileri, yükleme kaldırıldığında kaybolmaz. Dolayısıyla basamak fonksiyonu olarak uygulanmış bulunan bir yükleme karşısında kaydedilmiş biçim değiştirme söz konusuyken de aynı şekilde, ilgili biçim değiştirme, sadece halûhazırda hasıl olan anlık gerilmelerin değil, geçmişinde maruz kaldığı gerilmelerinin tümünün bir fonksiyonudur. Doğrusal davranış rejiminde, uygulanan yüklemeler bütünü karşısında kaydedilmiş cevaplar üstüste eklenebilmektedir. Viskoelastik cisme θ_1 ve θ_2 anlarında uygulanan gerilmeler (θ_1 ve θ_2 bölüm 10.1.1 ve 10.1.2 kapsamında zamanı ifade etmekte olup, , “Dinamik Laboratuvar Denek Testleri ve Kuramsal Altyapısı” başlıklı bölüm 16.2’de “faz açısı” olarak geçecek θ ‘yla karıştırılmamalıdır.) karşısında kaydedilen gerinimler, bir altta yeralan şekil 10.11.a’da incelenebileceği üzere aşağıdaki biçimde ifade edilebilmektedir.

$$\epsilon(t) = J(t - \theta_1)\Delta\sigma(\theta_1) + J(t - \theta_2)\Delta\sigma(\theta_2) \quad (10.18)$$



Şekil 10.11.a Doğrusal bölgede, uygulanmış bulunan gerilmelerin tümü karşısında kaydedilmiş birim yerdeğiştirmelerin üstüste eklenmesi

Şekil 10.11.a'daki veriler ışığında ifade aşağıdaki gibi düzenlenebilir

$$\varepsilon(t) = J(t - \theta_1)\Delta\sigma(\theta_1) + J(t - \theta_2)\Delta\sigma(\theta_2) - J(t - \theta_3)\Delta\sigma(\theta_3) \quad (10.19)$$

dolayısıyla i adet farklı anlarda gerçekleştirilmiş gerilmeler karşısındaki gerinim ifadesi

$$\varepsilon(t) = \sum_{\theta_i=-\infty}^{\theta_i=t} J(t - \theta_i)\Delta\sigma(\theta_i) \quad (10.20)$$

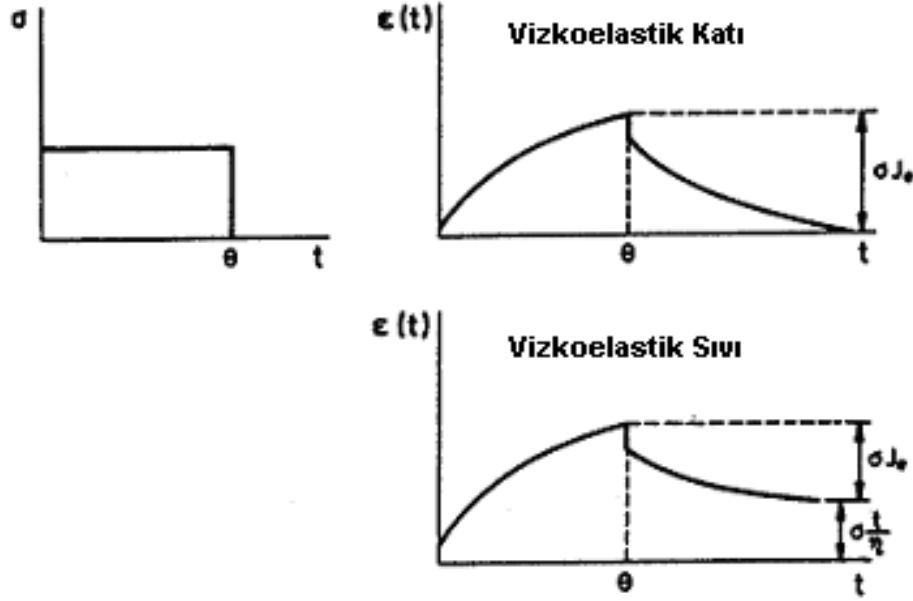
biçiminde yazılır ki bu durumda $\sigma = \sigma H(t)$ ve $H(t - \theta)\sigma = 0$ için, $t = \theta$ anında

$$\varepsilon(\theta) = J(\theta)\sigma \quad (10.21)$$

eşitliği elde edilir. İlgili $t = \theta$ anında kayma gerilmesi devre dışı kaldığından $t > \theta$ için kayma geriniminin ifadesi aşağıdaki halini alır.

$$\varepsilon(t) = J(t)\sigma - J(t - \theta)\sigma \quad (10.22)$$

$t = \theta$ anında kayma gerilmesinin devre dışı kalışının fiziksel anlamını pekiştirmek adına, bu andaki gerinimin zamana bağlı değişimini viskoelastik katı ve sıvılar için veren aşağıdaki Şekil 10.11.b incelenebilir.



Şekil 10.11.b $t=\theta$ anında kayma gerilmesinin devre dışı kalışıyla gerinimin zamana bağlı değişimindeki düşüşün viskoelastik katı ve sıvılar için gösterimi

(10.22) ifadesinde $t - \theta = u$ değişken dönüşümü yapılsa

$$\epsilon(\theta) - \epsilon(\theta + u) = [J(\theta) - J(\theta + u) + J(u)]\sigma \quad (10.23)$$

Eğer nihai sürünme uyum değerine erişilmemiş ise, sürünme uyum fonksiyonu zamana bağlı olarak azalarak artan bir değişim gösterdiğinden $J(t+\theta) > J(t)$ yazılabilir ve yukarıdaki ifade bu bağlamda

$$J_r(\theta, u) = \frac{\epsilon(\theta) - \epsilon(\theta + u)}{\sigma} < J(u) \quad (10.24)$$

halini alır. Eğer nihai sürünme uyum değerine, $t=\theta$ anında erişildiği düşünülürse, (10.23) ifadesi aşağıdaki halini alır.

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \left[J_r(\theta, u) = \frac{\epsilon(\theta) - \epsilon(\theta + u)}{\sigma} \right] = J(\infty) - J(\infty + u) + J(u) = J(u) \quad (10.25)$$

ve ifadede yeralan $J(\infty) = J(\infty + u)$ olduğundan, toparlanma (recovery) uyum fonksiyonu $J_r(t)$ ([9] sf. 209 eşitlik 5.29), şayet toparlanma, nihai uyumun erişilmesinin ardından kaydedilmişse, ilgili limit değeri için, uyum fonksiyonuna eşitlenmiş olur.

Diğer yandan Boltzmann üstüste ekleme prensibi, tabi tutulduğu hidrostatik basınç, ya da çekme gerilmelerin tümünü temsilen, viskoelastik cisim için uygulandığında $\Delta(t) = \text{trace } \epsilon_{ij}(t)$ olmak kaydıyla

$$\begin{aligned}\Delta(t) &= - \sum_{\theta=-\infty}^t B(t-\theta)p(\theta) \\ \epsilon_{11}(t) &= \sum_{\theta=-\infty}^t D(t-\theta)\Delta\sigma_{11}(\theta)\end{aligned}\quad (10.26)$$

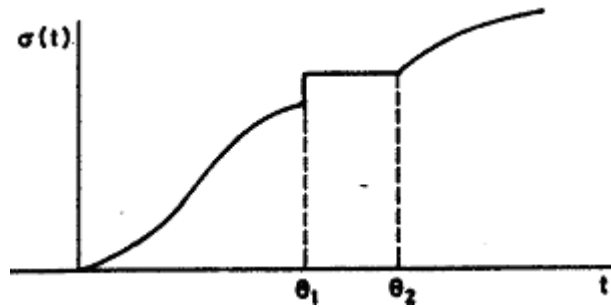
ifadeleri elde edilir.

10.1.1.3.2 Sürekli Biçim

Eğer kayma gerilmesi, zamana bağlı olarak, çok küçük adımlarla değişim gösteriyorsa, σ 'nın zamanın sürekli bir fonksiyonu olduğu kabul edilir ve sürünme testleri için Boltzmann üstüste ekleme prensibinin sürekli biçime haiz ifadesi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\epsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\theta) \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} d\theta \quad (10.27)$$

Aşağıda yeralan şekil 10.12'de görüldüğü üzere, $\sigma(t)$ fonksiyonu $-\infty < t < \theta_1$ ve $\theta_2 < t < \infty$ aralıklarında sürekli, $\theta_1 \leq t \leq \theta_2$ aralığınaysa sabitse, (10.26) ifadesi bu aralıkta türevi sıfır olacağından yazılamaz.



Şekil 10.12 $\theta_1 \leq t \leq \theta_2$ aralığında sabit, kalan aralıklarda gerekli tüm türevlerinde süreklilik arz eden gerilme fonksiyonunun zaman bağlı değişimi

Bu bağlamda (10.26) ifadesi, gerilmenin sabit olduğu aralığı dışarıda bırakacak şekilde parçalı fonksiyon biçiminde yazıldığında

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \int_{-\infty}^{\theta_1} J(t-\theta) \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} d\theta + J(t-\theta_1) \Delta\sigma(\theta_1) \\ &\quad + \int_{\theta_2}^t J(t-\theta) \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} d\theta\end{aligned}\quad (10.28)$$

halini alır, ki bu ifadede $\sigma(-\infty) = 0$ öngöründen hareketle $t=\theta=u$ değişken dönüşümü yapıp, ilgili terimlerin integralleri alınacak olursa

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= J_g \sigma(t) + \int_{-\infty}^t \sigma(\theta) \frac{dJ(t-\theta)}{d(t-\theta)} d\theta \\ &= J_g \sigma(t) + \int_0^\infty \sigma(t-u) \frac{dJ(u)}{du} du\end{aligned}\quad (10.29)$$

elde edilmiş olur. Benzer şekilde hidrostatik basınç karşısında viskoelastik sistemin sergilediği cevap, $\Delta(t) = \text{trace } \gamma_{ij}(t)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\Delta(t) &= - \int_{-\infty}^t B(t-\theta) \frac{dp(\theta)}{d\theta} d\theta \\ &= -B_g p(t) - \int_0^\infty p(t-u) \frac{dB(u)}{du} du\end{aligned}\quad (10.30)$$

biçiminde ifade edilebilir. Son olarak da çekme gerilmelerinin tümünü temsilen kaydedilmiş çekme birim yerdeğiştirmeleriye aşağıdaki gibi ifade bulur.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11}(t) &= \int_{-\infty}^t D(t-\theta) \frac{d\sigma_{11}(\theta)}{d\theta} d\theta \\ &= D_g \sigma_{11}(t) + \int_0^\infty \sigma_{11}(t-u) \frac{dD(u)}{du} du\end{aligned}\quad (10.31)$$

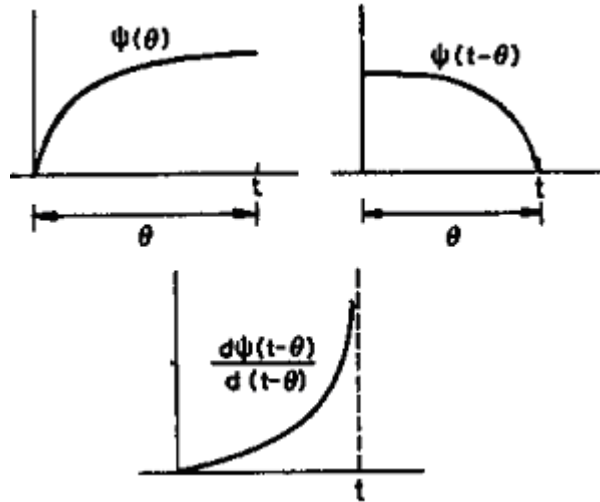
10.1.1.4 Sürünme Testlerinde Hafıza Etkileri (Memory Effects)

Viskoelastik cismin hafıza etkilerinin (uygulanmış tüm gerilmeler karşısında vermiş bulunduğu gerinim cevaplarının tamamının tarihçesinin kayıtlanıp halûhazırdaki ve gelecekteki cevaplara etkimesi) daha iyi kavranması adına birim yer

değiştirme fonksiyonunu, (10.29) eşitliğinden yola çıkarak, J_g ve J_d cinsinden yeniden yazmak gerekirse

$$\epsilon(t) = J_g \sigma(t) + J_d \int_{-\infty}^t \sigma(\theta) \frac{d\psi(t-\theta)}{d(t-\theta)} d\theta + \frac{1}{\eta} \int_{-\infty}^t \sigma(\theta) d\theta \quad (10.32)$$

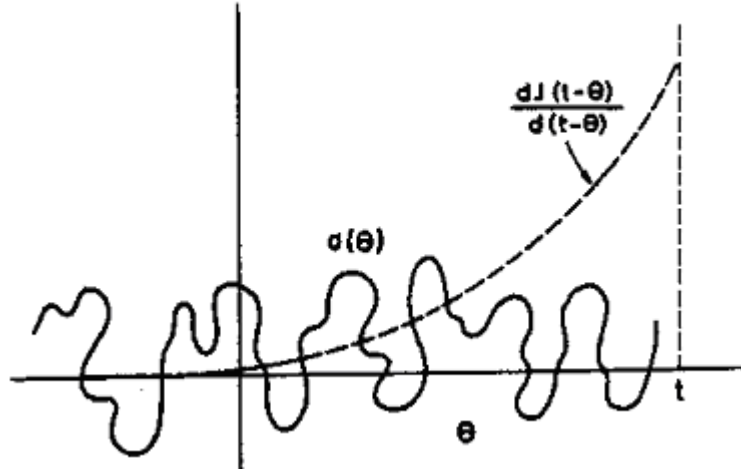
elde edilir ki viskoelastik sıvılar için formüle edilmiş bu bağıntı $\eta \rightarrow \infty$ için viskoelastik aktıları temsil eder hale gelmiş olur. Deneysel sonuçların gözleminden yapılmış bir çıkarım olarak $J(t) - (t/\eta) - J_g$ 'nin $t \rightarrow \infty$ için J_d 'ye indirgenir. ([9] sf. 212) $\psi(t)$ nin zamana bağlı artışı, şekil 10.13'te yeralan grafiklerin sağ üst köşesindekinde verimiştir. Buna karşın $\psi(t-\theta)$ ifadesininse, matematiksel olarak, yine şekil 10.13'ün sağ üst köşesinde yeralan grafiğinde görülebileceği gibi, artarak azalan bir fonksiyon olacağı aşikardır.



Şekil 10.13 $\psi(t)$, $\psi(t-\theta)$ ve $d\psi(t-\theta)/d(t-\theta)$ ifadelerinin θ , t , anına yaklaşırkenki değişimleri

Diğer yandan artarak azalan $\psi(t-\theta)$ ifadesin, bir nevi ivmesi, yani zamana göre türevi olan $d\psi(t-\theta)/d(t-\theta)$ 'ninse şekil 10.13Cün altında yeralan grafikte verildiği gibi, θ , t anına yaklaştığında aniden dikleşecek biçimde bir eğri çizdiği vurgulanmalıdır. Burada matematiksel olarak şöyle bir yorum yapılmaktadır, viskoelastik cisim yüklemeyle ilk karşılaşmasının hemen ardından, şekil 10.11.a'da gözlemlenebileceği gibi (θ_1 zamanının hemen ardından), ani bir açıklıkla eski haline dönmeye çalışmakta, bu akut durum zamanla azalmakta ve yükleme öncesi denge durumuna geri dönüş gitgide yavaşlamaktadır (θ_2 anına yaklaşmakta), muhtemel diğer bir yükleme, bir önceki yüklemenin ardından yaşanan denge konumuna dönüş

abalarının oldukça yavaş seyreden bir anına (θ_2 anı) denk geldiğinden, bu doğal fiziksel sonuç, matematikilerce, “bellek fonksiyonu $\psi(t)$, bir sonraki θ_n anına yaklaştıkça belleği zayıflar“ biçiminde yorumlanmakta, bu “zayıflayan belleğe“ bir sonraki θ_n anına yaklaşırken artan bir fonksiyon türetmek için de, türlü formülasyonlardan sonra, şekil 10.13’de yeralan $d\psi(t-\theta)/d(t-\theta)$ ya da aşğıdaki şekil 10.14’de yeralan $dJ(t-\theta)/d(t-\theta)$ ifadeleri ortaya konulmuştur.



şekil 10.14 Rastgele yükleme tarihçesi $\sigma(\theta)$ ve $dJ(t-\theta)/d(t-\theta)$ ‘nın bir sonraki θ_n anına yaklaştığındaki kaydettiği ani yükseliş

10.1.1.5 Boltzmann stste Ekleme Prensibi Relaksasyon Testlerindeki Uygulaması

10.1.1.5.1 Ayrık Biçim

Viskoelastik cismin $\Delta\epsilon(\theta_1)H(t-\theta_1)$, $\Delta\epsilon(\theta_2)H(t-\theta_2)$ biçimindeki ve kayma gerinimi tahriklerine tabi tutulduğunu farzedelim. Ek olarak $t = \theta_3$ anında, $\Delta\epsilon(\theta_3)$ kadarlık bir kayma gerinimi tahrikinin aniden uygulamadan kaldırıldığını düşünelim. Viskoelastik cismin gerilme-gerinim ilişkisi bu bağlamda aşağıdaki gibi ifade edilebilecektir.

$$\sigma(t) = G(t-\theta_1)\Delta\epsilon(\theta_1) + G(t-\theta_2)\Delta\epsilon(\theta_2) - G(t-\theta_3)\Delta\epsilon(\theta_3) \quad (10.33)$$

Yukarıdaki ifdeden de takip edilebileceği gibi , $t = \theta_3$ anında, $\Delta\epsilon(\theta_3)$ kadarlık bir kayma geriniminin kaldırılmasının, o anda aksi yönde aynı şiddette bir kayma geriniminin uygulanması biçiminde de değerlendirilebilir. Dolayısıyla Boltzmann üstüste ekleme prensibinin ayrık biçimdeki ifadesi bu örnek için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma(t) = \sum_{\theta_i=-\infty}^{\theta_i=t} G(t - \theta_i) \Delta \varepsilon(\theta_i) \quad (10.34)$$

Daha önce de benzer yollarla ifade edildiği üzere, θ_i anlarında, her yönden aynı oranda tabi tutulduğu yer değiştirme tahriklerine (hidrostatik basınç karşılığı) karşı verdiği gerilme cevaplarının aynı prensip doğrultusundaki ifadesi aşağıda verildiği gibidir.

$$p(t) = - \sum_{\theta_i=-\infty}^{\theta_i=t} K(t - \theta_i) \Delta(\theta_i) \quad (10.35)$$

Benzer biçimde, θ_i anlarında maruz kaldığı çekme gerinimleri karşısında verdiği gerilme cevaplarının tarihçesini zamana bağlı olarak ifade eden eşitlik aşağıdaki gibi yazılabilir.

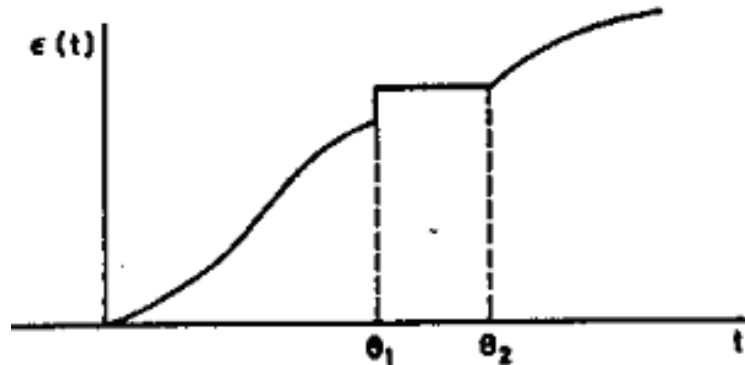
$$\sigma_{11}(t) = \sum_{\theta_i=-\infty}^t E(t - \theta_i) \Delta \varepsilon_{11}(\theta_i) \quad (10.36)$$

10.1.1.5.2 Sürekli Biçim

$\Delta \varepsilon(\theta_3)$ gerinim tahrik şiddetleri eğer çok küçükse, kayma gerilmesinin zamana bağlı değişimini veren ifade aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t G(t - \theta) \frac{d\varepsilon(\theta)}{d\theta} d\theta \quad (10.37)$$

Ancak bu eşitlik, gerinimin sabit kaldığı aralıklarda, türevi sıfır olduğu için, uygun sonuçlar verememektedir. (bkz. 10.15)



Şekil 10.15 $\theta_1 \leq t \leq \theta_2$ aralığında sabit, kalan aralıklarda gerekli tüm türevlerinde süreklilik arz eden gerinim fonksiyonunun zaman bağlı değişimi

Bu bağlamda (10.37) eşitliği, ilgili aralığı dışarıda bırakacak biçimde parçalı fonksiyon olarak yazılacak olursa

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \int_{-\infty}^{\theta_1} G(t-\theta) \frac{d\varepsilon(\theta)}{d\theta} d\theta + G(t-\theta_1)\Delta\varepsilon(\theta_1) \\ &\quad + \int_{\theta_2}^t G(t-\theta) \frac{d\varepsilon(\theta)}{d\theta} d\theta\end{aligned}\quad (10.39)$$

$\varepsilon(-\infty)=0$ ve sıvılar için $G_g=G(0)=G_d$ ve katılar için $G_g= G_e +G_d$ olduğu gözönünde bulundurularak, $t = \theta = u$ değişken dönüşümünün uygulanmasının ardından, (10.39)'daki ilgili terimlerin integralleri alınır

$$\sigma(t) = G_g \varepsilon(t) + \int_0^\infty \varepsilon(t-u) \frac{dG(u)}{du} du \quad (10.40)$$

ifadesi elde edilmiş olur. Her θ_i için şiddeti değişen hidrostatik basınçlar karşısında kaydedilen gerilme cevaplarının tümünün zamana bağlı ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}p(t) &= - \int_{-\infty}^t K(t-\theta) \frac{d\Delta(\theta)}{d\theta} d\theta \\ &= -K_g \Delta(t) - \int_0^\infty \Delta(t-u) \frac{dK(u)}{du} du\end{aligned}\quad (10.41)$$

Benzer şekilde her θ_i anı için, farklı şiddetteki bir çekme gerilmesine maruz kalan viskoelastik cismin kaydettiği çekme gerinimleri zamana bağlı olarak ifade eden bağıntı aşağıdaki gibi yazılabilir.

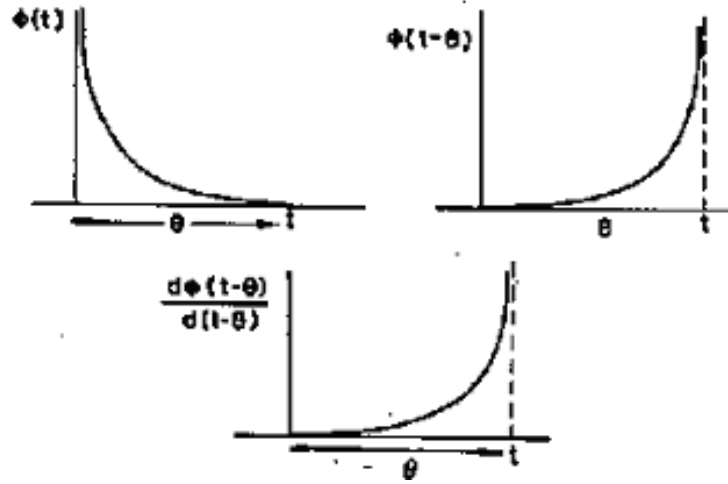
$$\begin{aligned}\sigma_{11}(t) &= \int_{-\infty}^t E(t-\theta) \frac{d\varepsilon_{11}(\theta)}{d\theta} d\theta \\ &= E_g \sigma_{11}(t) + \int_0^\infty \varepsilon_{11}(t-u) \frac{dE(u)}{du} du\end{aligned}\quad (10.42)$$

10.1.1.6 Relaksasyon Testlerinde Hafıza Etkileri (Memory Effects)

Relaksasyon testlerindeki hafıza etkilerinin incelenmesi için öncelikle (10.40) ifadesi, $\theta = t - u$ değişken dönüşümü yapılarak yeniden yazılacak olursak

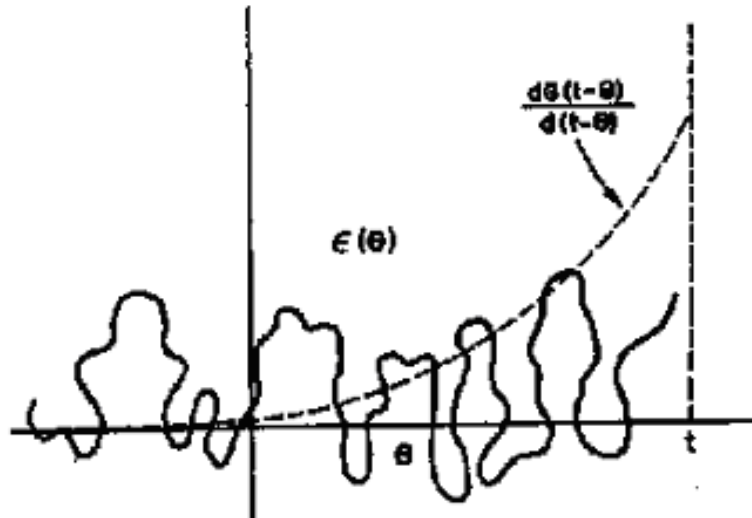
$$\sigma(t) = G_g \varepsilon(t) + G_d \int_{-\infty}^t \varepsilon(\theta) \frac{d\Phi(t-\theta)}{d(t-\theta)} d\theta \quad (10.43)$$

elde edilir ki bu bağlamda zamana bağlı, azalan bir ivmeyle düşüş gösteren bir fonksiyon olan $\Phi(t)$ nin grafik gösterimi şekil 10.16'da yeralan grafiklerin sağ üst köşesindekinde verimiştir. Buna karşın $\Phi(t-\theta)$ ifadesininse, matematiksel olarak, yine şekil 10.16'nın sağ üst köşesinde yeralan grafiğinde görülebileceği gibi, artan bir ivmeyle artan bir fonksiyon olacağı aşikardır.



Şekil 10.16 $\Phi(t)$, $\Phi(t-\theta)$ ve $d\Phi(t-\theta)/d(t-\theta)$ ifadelerinin θ, t anına yaklaşırkenki değişimleri

Diğer yandan artan ivmeyle yükseliş kaydeden $\Phi(t-\theta)$ ifadesin, bir nevi ivmesi, yani zamana göre türevi olan $-d\Phi(t-\theta)/d(t-\theta)$ 'ninse şekil 10.16'nın altında yeralan grafikte verildiği gibi, θ, t anına yaklaştığında aniden dikleşecek biçimde bir eğri çizdiği görülebilmektedir.



Şekil 10.17 Rastgele yükleme tarihçesi $E(\theta)$ ve $dG(t-\theta)/d(t-\theta)$ 'nın bir sonraki θ_n anına yaklaştığındaki kaydettiği ani yükseliş.

Yukarıda yeralan şekil 10.17 için yapılacak yorum, bölüm 10.1.1.4'deki şekil 10.14 için yapılmış yorumun aynısıdır.

10.1.1.7 Geçiş Relaksasyon Modülleri ve Geçiş Uyum Fonksiyonları Arasındaki Laplace Dönüşüm İlişkileri

(10.27) ve (10.37) eşitliklerine Laplace dönüşümleri uygulanarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\begin{aligned}\bar{e}(s) &= \bar{J}(s)s\bar{\sigma}(s) \\ \bar{\sigma}(s) &= \bar{G}(s)s\bar{e}(s)\end{aligned}\tag{10.44}$$

ki bu ifadelerdeki terimlerin üzerinde yeralan çizgiler Laplace dönüşümü olduklarını ifade etmektedir. (10.44) ifadeleri aşağıdaki eşitliği verecek şekilde düzenlenecek olursa

$$\bar{J}(s)\bar{G}(s) = \frac{1}{s^2}\tag{10.45}$$

biçiminde elde edilen eşitlik kayma uyum fonksiyonunun, relaksasyon modülü yardımıyla hesaplanabilmesini sağlar. Öte yandan (10.41) ve (10.42) denklemlerinin Laplace dönüşümleri de aşağıdaki ifadeleri vermektedir.

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}(s) &= -s\bar{B}(s)\bar{p}(s) \\ \bar{p}(s) &= -s\bar{K}(s)\bar{\Delta}(s)\end{aligned}\tag{10.46}$$

Bu eşitlikler de aşağıdaki ifade çerçevesinde düzenlenirse elde edilen

$$\bar{B}(s)\bar{K}(s) = \frac{1}{s^2}\tag{10.47}$$

bağıntısı yardımıyla, yığılma sürünmesi uyum fonksiyonu ya da yığılma relaksasyon modülünden birinin bilinmesi halinde diğerinin değeri ifadeden çekilebilir, benzer şekilde (10.31) ve (10.41) ifadelerinde ilgili Laplace dönüşümleri yapılacak olursa

$$\bar{D}(s)\bar{E}(s) = \frac{1}{s^2}\tag{10.48}$$

bağıntısı elde edilmiş olur ki, bu ifade yardımıyla da çekme gerilmesi uyum fonksiyonu ve çekme relaksasyon modülünden birinin bilinmesi halinde diğeri elde edilebilmektedir.

10.1.1.8 Önemli Eşitsizlikler

(10.45) ifadesinin ters Laplace dönüşümünden elde edilen

$$\int_0^t G(t-\theta)J(\theta)d\theta = \int_0^t J(t-\theta)G(\theta)d\theta = t \quad (10.49)$$

ifadesinde Leibnitz kuralı uygulanırsa, $u=t-\theta$ değişken dönüşümü sonucunda ifadenin zamana göre türevi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{dG(u)}{du} J(t-u)du + G_t J(t) &= 1 \\ \int_0^t \frac{dJ(u)}{du} G(t-u)du + J_t G(t) &= 1 \end{aligned} \quad (10.50)$$

Diğer yandan aşağıda yeralan iki eşitlik,

$$J(t-u) = J(t) + [J(t-u) - J(t)] \quad (10.51)$$

$$G(t-u) = G(t) + [G(t-u) - G(t)] \quad (10.52)$$

sırasıyla (10.49) 'daki ifadelerde yerlerine konursa, aşağıda yeralan eşitlikler elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned} J(t)G(t) + \int_0^t [J(t-u) - J(t)] \frac{dG(u)}{du} du &= 1 \\ J(t)G(t) + \int_0^t [G(t-u) - G(t)] \frac{dJ(u)}{du} du &= 1 \end{aligned} \quad (10.53)$$

ki bu bağlamda, $J(t)$ nin sürekli artan ve $G(t)$ 'nin de sürekli azalan zamana bağlı fonksiyonları olduğu hatırlanacak olursa, $J(t-u) - J(t) \leq 0$ ve $dG(t)/dt \leq 0$, aynı nedenden ötürü $G(t-u) - G(t) \geq 0$, $dJ(t)/dt \geq 0$ olduğundan ve bu verilerin (10.53) ifadeleriyle ortak değerlendirilmesiyle aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$J(t)G(t) \leq 1 \quad (10.54)$$

Öte yandan $t=0$ için (10.53) ifadelerindeki integraller kaybolur ve $J_g G_g = 1$ ifadesi elde edilir. Viskoelastik katılar için, $t \rightarrow \infty$ iken $J(t-u) - J(t)$ ve $G(t-u) - G(t)$ de kaybolur ve $J_e G_e = 1$ elde edilir. Viskoelastik sıvılar içinse $t \rightarrow \infty$ iken $dJ(t)/dt = 1/\eta$ ve $G(t) = 0$ olur, ki bu durumda (10.53)'deki ikinci ifade aşağıdaki halini alır.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(t)J(t) = J_e^0 G_e = 1 - \frac{1}{\eta} \int_0^\infty G(t-u)du. \quad (10.55)$$

Diğer taraftan (10.47) ve (10.48) ifadelerinin de ters Laplace dönüşümleri alınacak olursa, sırasıyla aşağıda yeralan eşitlikler elde edilmiş olur,

$$\int_0^t D(t-\theta)E(\theta)d\theta = \int_0^t D(\theta)E(t-\theta)d\theta = t \quad (10.56)$$

$$\int_0^t K(t-\theta)B(\theta)d\theta = \int_0^t B(t-\theta)K(\theta)d\theta = t \quad (10.57)$$

ki bu durumda aşağıda yeralan eşitsizliklerin de sağlanacağı aşikardır.

$$\begin{aligned} K(t)B(t) &\leq 1 \\ D(t)E(t) &\leq 1 \end{aligned} \quad (10.58)$$

10.1.1.9 Üstüste Ekleme Prensibinin Genelleştirilmesi

Üst üste ekleme prensibi doğrultusunda, viskoelastik sistemler için, gerinim tensörünün gerilme tensörünü içeren bağıntısı aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\gamma_{ij}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^t J(t-\theta) \frac{d\sigma_{ij}(\theta)}{d\theta} d\theta + \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \left[\frac{B(t-\theta)}{9} - \frac{J(t-\theta)}{6} \right] \frac{d\Sigma(\theta)}{d\theta} d\theta \quad (10.59)$$

ki bu ifadedeki $\Sigma = \text{trace } \sigma_{ij}$ dir. Diğer yandan gerilme tensörünün gerinim tensörünü içeren bağıntısı ise aşağıdaki verildiği biçimde yazılabilir.

$$\sigma_{ij}(t) = 2 \int_{-\infty}^t G(t-\theta) \frac{d\gamma_{ij}(\theta)}{d\theta} d\theta + \delta_{ij} \int_{-\infty}^t \left[K(t-\theta) - \frac{2}{3} G(t-\theta) \right] \frac{d\Delta(\theta)}{d\theta} d\theta \quad (10.60)$$

ki bu ifadede yeralan $\Delta = \text{trace } \gamma_{ij}$ dir. 10.1.1.3.2 ve 10.1.1.5.2 bölümlerinde değinildiği üzere, zamana bağlı değişimleri boyunca, $\theta_1 - \theta_2$ zaman aralıklarında, sabit fonksiyon özelliği gösteren gerilme ve gerinimin (10.59) ve (10.60) ifadelerindeki türevli terimlerin, ilgili zaman aralığında sorun yaratacaklarından, bahsi geçen (10.59) ve (10.60) ifadelerinde kısmi integral kullanılmıştır.

Doğrusal viskoelstisitedeki genelleştirilmiş gerilme-gerinim ilişkileri, doğrudan genelleştirilmiş Hook kanunundan da elde edilebilir. ([9] sf. 221) Bu

bağlamda (3.144) ve (3.182) ifadelerinde, gerilme analizine dair elastik cevabın bilindiği durumlar karşısında, kompleks viskoelastik çözüme, elastik nicelikler yerine, s ile çarpılmış Laplace dönüşümlerinin konulması yoluyla ulaşılabileceğini öngören prensip doğrultusunda ("correspondence principle" [9] sf 221) işlem yapılacak olursa, (3.144) ifadesi aşağıdaki eşitliği verecektir.

$$\bar{\sigma}_y(s) = 2s\bar{G}(s)\bar{\gamma}_y(s) + \delta_y(s) \left[\bar{K}(s) - \frac{2}{3}\bar{G}(s) \right] \bar{\Delta}(s) \quad (10.61)$$

ki bu ifadenin yeniden dönüşümünün (10.60) 'ı vereceği açıktır. Benzer biçimde aynı prensibin (3.182) ifadesine uygulanmasıyla aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$\bar{\gamma}_y(s) = \frac{1}{2}s\bar{J}(s)\bar{\sigma}_y(s) + \delta_y \left[\frac{\bar{B}(s)}{9} - \frac{\bar{J}(s)}{6} \right] s\bar{\Sigma}(s) \quad (10.62)$$

ki bu ifadenin de yeniden dönüşümü (10.59) 'u vermektedir. Diğer taraftan (10.61) ifadesindeki γ_{ij} çekilip, elde edilen bu yeni eşitliğin sağ tarafına (10.62) ifadesi yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilmiş olur.

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_y(s) &= \frac{\bar{\sigma}_y(s)}{2s\bar{G}(s)} - \delta_y \frac{\bar{K}(s) - (2/3)\bar{G}(s)}{\bar{G}(s)} \left(\frac{\bar{\Sigma}(s)}{2s\bar{K}(s)} \right) \\ &= \frac{1}{2}s\bar{J}(s)\bar{\sigma}_y(s) + \delta_y \left[\frac{\bar{B}(s)}{9} - \frac{\bar{J}(s)}{6} \right] s\bar{\Sigma}(s) \end{aligned} \quad (10.63)$$

Öte yandan gözönünde bulundurulmak üzere ifade etmek gerekirse

$$\bar{\Sigma}(s) = 3s\bar{K}(s)\bar{\Delta}(s) \quad (10.64)$$

olur ki ilgili düzenleme yapıldığında aşağıdaki ifade elde edilmiş olur.

$$\bar{\Delta}(s) = \frac{\bar{\Sigma}(s)}{3s\bar{K}(s)} \quad (10.65)$$

10.1.1.10 Viskoelastik Fonksüyonlar Arasındaki Önemli Bağlıntılar

Çekme gerilmesi altındaki bir sistem için (10.62) ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\bar{\gamma}_{11}(s) = \left[\frac{\bar{J}(s)}{3} + \frac{\bar{B}(s)}{9} \right] s\bar{\sigma}_{11}(s) \quad (10.66)$$

ki bu ifadeden yola çıkarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$\frac{\bar{\gamma}_{11}(s)}{s\bar{\sigma}_{11}(s)} = \left[\frac{\bar{J}(s)}{3} + \frac{\bar{B}(s)}{9} \right] = \bar{D}(s) \quad (10.67)$$

bu ifadenin ters Laplace dönüşümü sonucunda aşağıdaki eşitliğin elde dildiği görülecektir.

$$D(t) = \frac{J(t)}{3} + \frac{B(t)}{9} \quad (10.68)$$

Diğer bir deyişle, doğrusal bölgedeki viskoelastik tarihçeden bağımsız olarak, çekme uyum fonksiyonu, kayma ve yığılma uyum fonksiyonlarından elde edilebilmektedir. (10.48) ifadesinden çekme relaksasyon modülünün Laplace dönüşümlü halinin çekilmesi sonucu, ifadenin sağ tarafında kalan çekme uyum fonksiyonunun Laplace dönüşümlü ifadesi yerine, (10.68) eşitliğin Laplace dönüşümü yapılmış hali konulursa, ifade aşağıdaki halini alır.

$$\begin{aligned} s\bar{E}(s) &= \frac{1}{s\bar{D}(s)} = \frac{1}{s[\bar{J}(s)/3 + \bar{B}(s)/9]} \\ &= \frac{1}{1/3s\bar{G}(s) + 1/9s\bar{K}(s)} \end{aligned} \quad (10.69)$$

ki ifade, ilgili düzenlemeler sonucu aşağıdaki halini alır.

$$\bar{E}(s) = \frac{9\bar{G}(s)\bar{K}(s)}{3\bar{K}(s) + \bar{G}(s)} \quad (10.70)$$

ki bu ifadenin sol tarafını oluşturan relaksasyon uyum modülüne (3.155)'inde "correspondence" prensibinin uygulanması yoluyla erişilebileceği hatırlatılmalıdır. ([9] sf. 223). (10.70) ifadesi ise gerçek zamana bağlı ifadesiyle aşağıdaki biçimiyle

$$\int_0^t E(t-\theta)G(\theta)d\theta + 3 \int_0^t E(t-\theta)K(\theta)d\theta = 9 \int_0^t K(t-\theta)G(\theta)d\theta \quad (10.71)$$

yazılacak olursa, bu ifadedeki veriler ışığında çekme modülünün, kayma ve yığılma relaksasyon modüllerinin her ikisine de açık (explicit) bir bağımlılık arz etmiyor olduğu görülecektir. Bu bağlamda da $K(t) \gg G(t)$ ve $E(t) \cong 3G(t)$ olduğu görülecektir.

Öte yandan çekme gerilmesi durumunda, $\sigma_{11} \neq 0$, $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ ve $\gamma_{11}, \gamma_{22} = \gamma_{33}$ olduğu dikkate alınırsa, (10.63) ifadesinden diğer asal eksenlerdeki gerinimlerin, çekme asal eksenine ait gerinimini içeren bağıntıları, aşağıda verildiği biçimdedir.

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_{22}(s) = \bar{\gamma}_{33}(s) &= -\frac{\bar{J}(s)/6 - \bar{B}(s)/9}{\bar{J}(s)/3 + \bar{B}(s)/9} \bar{\gamma}_{11}(s) \\ &= -\frac{3\bar{K}(s) - 2\bar{G}(s)}{6\bar{K}(s) + 2\bar{G}(s)} \bar{\gamma}_{11}(s)\end{aligned}\quad (10.72)$$

bu bağlamda Poisson oranının Laplace dönüşümü yapılmış hali aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}\bar{\nu}(s) &= -\frac{\bar{\gamma}_{22}(s)}{\bar{\gamma}_{11}(s)} = -\frac{\bar{\gamma}_{33}(s)}{\bar{\gamma}_{11}(s)} \\ &= \frac{\bar{J}(s)/6 - \bar{B}(s)/9}{\bar{J}(s)/3 + \bar{B}(s)/9} = \frac{3\bar{K}(s) - 2\bar{G}(s)}{6\bar{K}(s) + 2\bar{G}(s)}\end{aligned}\quad (10.73)$$

ifadede complex $\nu(t)$ 'nin viskoelastik fonksiyonlara bağlı oluşuna rağmen, Poisson oranının sınır değerleri rahatlıkla elde edilebilmektedir. Anlık (initial) ve nihai (final) değerler kuramı doğrultusunda ([9] sf 224) eğer $f(t)$ fonksiyonunun bir limiti varsa, aşağıdaki ifadeler sağlanmak durumundadır.

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} f(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} s\bar{f}(s) = f(0) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s\bar{f}(s) = f(\infty)\end{aligned}\quad (10.74)$$

ki bu bağlamda (10.73) ifadesi aşağıdaki yeni haliyle yazılabilmektedir.

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow \infty} \bar{\nu}(s) &= \frac{3K_g - 2G_g}{6K_g + 2G_g} = \nu_g \\ \lim_{s \rightarrow 0} \bar{\nu}(s) &= \frac{3K_e - 2G_e}{6K_e + 2G_e} = \nu_e\end{aligned}\quad (10.75)$$

İlgili ifadede yeralan ν_g , kısa vadedeki, diğer bir deyişle camsı mertebedeki (glassy-like state) Poisson oranını ($s \rightarrow \infty$), ν_e ise uzun vadedeki ($s \rightarrow 0$), farklı bir deyişle, denge durumu Poisson oranını temsil etmektedir. $K_e \gg G_e$ olduğundan, (10.75) ifadelerinden ikincisi $\nu_e = 0.5$ olmasını öngörür. Camsı mertebedeysen K_e ve G_e nispeten birbirlerine daha yakın değerlere sahip olduklarından ($K_e = 2.67G_e$) (10.75) ifadelerinden ilki $\nu_e = 1/3 \approx 0.33$ olmasını öngörür, ki bu bağlamda $J(t)$, $D(t)$ ve $B(t)$ gibi, Poisson oranı da zamana bağlı olarak verilen sınır değerler çerçevesinde sürekli artan bir fonksiyon arz etmektedir.

x_1 asal eksenini doğrultusunda tek eksenli bir çekme gerilmesine maruz kalan izotropik elastik katı için Poisson oranı, $\nu = \gamma_{22}/\gamma_{11}$ olup, “correspondence” prensibi gereğince aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\bar{\gamma}_{22}(s) = \bar{\gamma}_{33}(s) = -s\bar{\nu}(s)\bar{\gamma}_{11}(s) \quad (10.76)$$

ki ilgili ifade zaman boyutunda yazılacak olursa aşağıdaki halini alır.

$$\begin{aligned} \gamma_{22}(t) = \gamma_{33}(t) &= - \int_{-\infty}^t \nu(t-\theta) \frac{\partial \gamma_{11}(\theta)}{\partial \theta} d\theta \\ &= -\nu_s \sigma_{11}(t) - \int_0^\infty \gamma_{11}(t-u) \frac{d\nu(u)}{du} du \end{aligned} \quad (10.77)$$

Buradan yola çıkarak, çekme ve kayma modülü arasındaki bağıntıyı, Poisson oranı cinsinden yazmak istersek, $E=2(1+\nu)G$ olduğunu gözönünde bulundurarak aynı “correspondence” doğrultusunda

$$s\bar{E}(s) = 2[1 + s\bar{\nu}(s)]s\bar{G}(s) \quad (10.78)$$

elde edilmiş olur ki bu ifadenin de ters Laplace dönüşümü sonucunda

$$\begin{aligned} E(t) &= 2G(t) + 2 \int_{-\infty}^t \nu(t-\theta) \frac{\partial G(\theta)}{\partial \theta} d\theta \\ &= 2G(t)[1 + \nu_s] + 2 \int_0^\infty G(t-u) \frac{\partial \nu(u)}{\partial u} du \end{aligned} \quad (10.79)$$

bağıntısı elde edilmiş olur, ki bu eşitlikteki $[\nu(0)]$ camsı Poisson oranı olarak anılmakta ([9] sf. 225) ve “correspondence” prensibinin (10.79) ‘a uygulanmasıyla, yığılma relaksasyon modülünün, en azından kuramsal olarak, ölçümler sonucu kaydedilen çekme relaksasyon modülü ve Poisson oranından yola çıkarak hesaplanmasına izin veren aşağıdaki ifade elde edilmiş olur.

$$s\bar{K}(s) = \frac{s\bar{E}(s)}{3[1 - 2s\bar{\nu}(s)]} \quad (10.80)$$

ki bu ifadeyi yazarken Tablo1 de verilen $K=E/(3(1-2\nu))$ ilişkisinden de yararlanılmış bulunmaktadır. İfadeden, çekme relaksasyon modülünün Laplace dönüşümü uygulanmış hali çekilecek olursa eşitlik

$$\bar{E}(s) = 3[1 - 2s\bar{\nu}(s)]\bar{K}(s) \quad (10.81)$$

halini alır ki ifade, gerçek zaman eksenine yeniden aktarılmasıyla, aşağıdaki biçimini almış olur.

$$E(t) = 3(1 - 2\nu_g)K(t) + 6 \int_0^t K(u) \frac{d\nu(t - \nu)}{d\nu} d\nu \quad (10.82)$$

10.1.1.11 Frekansa Bağlı, Genelleştirilmiş Gerilme-Gerinim İlişkileri

Harmonik cevap için $s=i\omega$ dönüşümü (10.61) ve (10.62) ifadelerinde uygulanacak olursa

$$\sigma_{ij}(\omega) = \left[K^*(\omega) - \frac{2}{3} G^*(\omega) \right] \Delta(\omega) \delta_{ij} + 2G^*(\omega) \gamma_{ij}(\omega) \quad (10.83)$$

$$\gamma_{ij}(\omega) = \left[\frac{1}{9} B^*(\omega) - \frac{1}{6} J^*(\omega) \right] \Sigma(\omega) \delta_{ij} + \frac{1}{2} J^*(\omega) \sigma_{ij}(\omega) \quad (10.84)$$

ifadeleri elde edilir ki bu eşitliklerden (10.83) 'de yeralan $\Delta(\omega)$ ve (10.84) 'de yeralan $\Sigma(\omega)$ 'nin açılımları aşağıda verilmiştir.

$$\Delta(\omega) = \gamma_{11}(\omega) + \gamma_{22}(\omega) + \gamma_{33}(\omega) \quad (10.85)$$

$$\Sigma(\omega) = \sigma_{11}(\omega) + \sigma_{22}(\omega) + \sigma_{33}(\omega) \quad (10.86)$$

Bu bağlamda harmonik çekem gerilmesine tabi tutulmuş bir cisim için gerilme tensörü aşağıda verildiği gibi yazılır.

$$\sigma_{ij}(\omega) = \begin{bmatrix} \sigma_{11}(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10.87)$$

ki bu durumda ilgili gerinim tensörü de şu şekilde yazılmaktadır.

$$\gamma_{ij}(\omega) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{22}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{33}(\omega) \end{bmatrix} \quad (10.88)$$

Öte yandan (10.87) ,ye ait bileşenleri (10.83) ifadesinden yola çıkarak ifade etmek istersek

$$\sigma_{11}(\omega) = \left[K^*(\omega) - \frac{2}{3}G^*(\omega) \right] \Delta(\omega) + 2G^*(\omega)\gamma_{11}(\omega) \quad (10.89)$$

$$0 = \left[K^*(\omega) - \frac{2}{3}G^*(\omega) \right] \Delta(\omega) + 2G^*(\omega)\gamma_{22}(\omega) \quad (10.90)$$

Buna mukabil (10.87) ve (10.88)'in ilgili bileşenleri (10.70) ifadesinde yerlerine konduğunda

$$E^*(\omega) = \frac{\sigma_{11}(\omega)}{\gamma_{11}(\omega)} = \frac{9K^*(\omega)G^*(\omega)}{3K^*(\omega) + 2G^*(\omega)} \quad (10.91)$$

elde edilmiş olur ki bu bağıntı kompleks çekme relaksasyon modülünün, kompleks yığılma ve kayma modülleriyle olan ilişkisini vermektedir. Benzer bir biçimde (10.68) 'den yola çıkarak

$$D^*(\omega) = \frac{1}{9}B^*(\omega) + \frac{1}{3}J^*(\omega) \quad (10.92)$$

ifadesi elde edilir ki bu bağıntı da kompleks çekme uyum fonksiyonunun, kompleks yığılma ve kayma uyum fonksiyonlarıyla ilişkisini tanımlamaktadır. Buna ek olarak $K^*(\omega) \gg G^*(\omega)$ ve $B^*(\omega) \ll J^*(\omega)$ ifadeleri ışığında (10.91) ve (10.92) eşitliklerinde gerekli düzenlemeler yapılacak olursa

$$E^*(\omega) = 3G^*(\omega) \quad D^*(\omega) \simeq \frac{1}{3}J^*(\omega) \quad (10.93)$$

ifadeleri elde edilmiş olur. Kompleks viskoelastik fonksiyonlar arasındaki ilişkiler Tablo 1 ve Tablo 2'de verilenlere genel anlamda benzemekte olup, en belirgin farklılıkları, fonksiyon olarak frekansa bağlı olarak yazılmış olmalıdır ki bunun doğal sonucu olarak, reel bileşenlerinin yanısıra imajiner bileşenlere de sahiptirler.

10.1.1.12 Herhangi Bir Simetri Derecesine Sahip Viskoelastik Sistemler İçin Genelleştirilmiş Gerilme-Gerinim İlişkileri

Laplace dönüşümleriyle yapılacak çözümlemeler devam ettirilerek, bölüm 3.3'de simetri derecelerine dair verilen açıklamaların ışığında, herhangi bir simetri derecesinden bağımsız olarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}_{ij}(s) &= s \overline{C}_{ijkl}(s) \overline{\gamma}_{kl}(s) \\ \overline{\gamma}_{ij}(s) &= s \overline{R}_{ijkl}(s) \overline{\sigma}_{kl}(s)\end{aligned}\quad (10.94)$$

gerçek zaman eksenine taşındığında bu ifadeler aşağıdaki hallerini almış olurlar.

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(t) &= \int_{-\infty}^t C_{ijkl}(t-\theta) \frac{d\gamma_{kl}(\theta)}{d\theta} d\theta \\ \gamma_{ij} &= \int_{-\infty}^t R_{ijkl}(t-\theta) \frac{d\sigma_{kl}(\theta)}{d\theta} d\theta\end{aligned}\quad (10.95)$$

Bu ifadelerden yararlanarak, bölüm 3.3’de aşama aşama sahip olacağı en yüksek simetri derecesine çıkarılmış ilgili elastik cismin herhangi bir simetri derecesi için analitik çözümlenmesine zemin hazırlanmış olur. Bölüm 10.1.1’de sunulan kuramsal altyapıya dair bazı sayısal örnek aşağıda yer alan altbaşlık kapsamında toplanmıştır.

10.1.1.12 Bölüm 10.1.1 Kapsamınca Verilmiş Kuramsal Altyapıya Dair Sayısal Örnekler

10.1.1.12 Örnek-1

Aşağıdaki üç fonksiyonunun doğrusal ya da doğrusal olmayan fonksiyon olduklarını göstermemiz gerekirse:

$$\begin{aligned}(a) \quad \epsilon &= t^2 \sigma; \quad (b) \quad \epsilon = t \sigma^2 \\ (c) \quad \epsilon_{ij} &= \int_{-\infty}^t J(t-\tau) d\sigma_{ij}(\tau)\end{aligned}\quad (10.96)$$

(10.96.a) için;

$$\epsilon_1 = t^2 \sigma_1 \quad \epsilon_2 = t^2 \sigma_2 \quad (10.97)$$

böylece

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 = t^2 (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (10.98)$$

$$\lambda \epsilon_1 = t^2 (\lambda \sigma_1) = \lambda t^2 \sigma \quad (10.99)$$

buradan (10.96.a) ifadesinin doğrusal olduğu görülmektedir. (10.96.b) için;

$$\epsilon = t \sigma^2; \quad \sigma_1 = 2\sigma \quad \epsilon_1 = 4t \sigma^2 \neq 2\epsilon \quad (10.100)$$

buradan (10.96.b) ifadesinin doğrusal olmadığı görülmektedir. (10.96.c) için;

$$\begin{aligned}\varepsilon_{y1} &= \int_{-\infty}^t J(t-\tau) d\sigma_{y1}(\tau); & \varepsilon_{y2} &= \int_{-\infty}^t J(t-\tau) d\sigma_{y2}(\tau) \\ \varepsilon_{y1} + \varepsilon_{y2} &= \int_{-\infty}^t J(t-\tau) d[\sigma_{y1}(\tau) + \sigma_{y2}(\tau)]\end{aligned}\quad (10.101)$$

$$\varepsilon_y' = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) d[\lambda\sigma_y(\tau)] \quad (10.102)$$

$$= \lambda \int_{-\infty}^t J(t-\tau) d\sigma_y(\tau) = \lambda\varepsilon_y \quad (10.103)$$

buradan da (10.96.c) ifadesinin doğrusal olduğu görülmektedir.

10.1.1.12 Örnek-2

Aralarında $h=0,5$ [mm] mesafe olan 2 paralel plaka arasında burulmaya maruz kalmış bir viskoelastik malzeme 10[s]de 1° alçak şekilde dönmektedir. Moment 200 [Nm], plakaların yarıçapı 2[cm] olduğuna göre $t=10$ [s]deki uyumu bulmak gerekirse:

Eylemsizlik kuvvetleri ihmal edildiğinde ve uzamalar sonsuz küçükse, gerilme-uzama ilişkisi sistemin geometrik karakterindeki kuvvet-yer değiştirme ilişkisi olarak açıklanabilir. Küçük yer değiştirmeler için gerilme moment ile ilişkilendirilirse:

$$\sigma = \frac{dM}{r^2 dr d\theta} \quad (10.104)$$

Diğer yandan gerilme-uzama ilişkisinden, uzama:

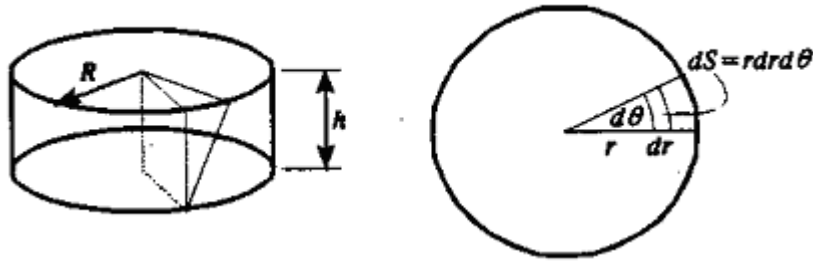
$$\sigma J(t) = \varepsilon(t) = \frac{r}{h} \varphi(t) \quad (10.105)$$

$\varphi(t)$ hareketli plakanın dönme açısıdır.

$$J(t) \frac{dM}{r^2 dr d\theta} = \frac{r}{h} \varphi(t) \quad (10.106)$$

İntegrasyondan sonra aşağıdaki denklem elde edilir:

$$J(t) = \frac{\pi}{2M} \left(\frac{R^4}{h} \right) \varphi(t) \quad (10.107)$$



Şekil 10.18, 10.1.1.12 Örnek-2

Böylece $R = 0.02[m]$, $h = 0.0005[m]$ ve $\varphi = 2\pi/360$, $J(10s) \cong 4.4 \times 10^{-8} Pa^{-1}$ olmaktadır.

10.1.1.12 Örnek-3

Andrade denklemine uyan bir malzeme için, $J(t) = At^{1/3}$, burulma açısı $t = t_1$ anında φ iken, $t = 8t_1$ anında 2φ olduğunu göstermek gerekirse:

Andrade eşitliği:

$$J(t_1) = At_1^{1/3} = F\varphi(t_1) = F\varphi_1 \quad (10.108)$$

ve

$$J(t_2) = At_2^{1/3} = F\varphi(t_2) = F\varphi_2 \quad (10.109)$$

Bu yüzden

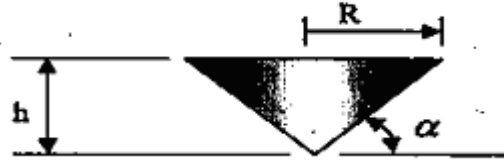
$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{t_1^{1/3}}{t_2^{1/3}} = \left(\frac{t_1}{8t_1}\right)^{1/3} = \frac{1}{2} \quad (10.110)$$

ve böylece:

$$\varphi_2 = 2\varphi_1. \quad (10.111)$$

10.1.1.12 Örnek-4

Aşağıdaki şekilde görülen koni-plaka düzeneğinde burulmaya maruz bırakılmış bir viskoelastik malzeme vardır ve aynı moment altında 2 kat daha büyük dönme açısı elde etmek için koninin tabanında ne kadarlık bir değişim yapılması gerektiğine bakılırsa:



Şekil 10.19, 10.1.1.12 Örnek-4

Bu durumda $\sigma = dM / (r^2 dr d\theta)$ ve gerilme-uzama ilişkisi aşağıdaki biçimini alır:

$$J(t)\sigma = \frac{r}{h}\varphi(t) \quad (10.112)$$

Çok küçük α değerleri için $h = r \tan \alpha \cong r\alpha$, ve:

$$J(t) M = \frac{\varphi(t)}{\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 dr d\theta = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{R^3}{\alpha} \right) \varphi(t) \quad (10.113)$$

Yukarıdaki eşitlikten

$$R_1^3 \varphi(t_1) = R_2^3 \varphi(t_2). \quad (10.114)$$

elde edilir. Eğer

$$\varphi(t_2) = 2\varphi(t_1), \quad (10.115)$$

isteniyorsa:

$$R_1^3 = 2R_2^3 \quad R_2 = 0.794 R_1 \quad (10.116)$$

Yarıçap %21 oranında küçültülmelidir.

10.1.1.12 Örnek-5

Sürünme

uyum

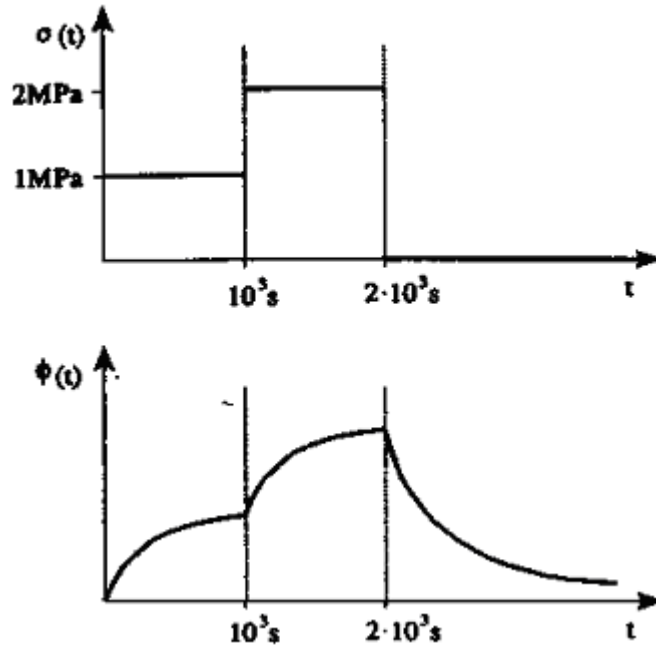
fonksiyonu

$J(t) = [1.4678 - 0.8730 \exp(-0.5268t)] \times 10^{-9} \text{ MPa}^{-1}$ olarak verilmiş bir viskoelastik malzemeden elde edilmiş silindirik bir kolun $t=1[\text{s}]$, $600[\text{s}]$, $1001[\text{s}]$, $1800[\text{s}]$ ve $3600[\text{s}]$ anındaki burulma açısını elde etmek için:

$$\begin{aligned} t < 0, & \quad \sigma = 0 \\ 0 \leq t < 1000 \text{ s}, & \quad \sigma = 1 \text{ MPa} \\ 1000 \leq t < 2000 \text{ s}, & \quad \sigma = 2 \text{ MPa} \\ t \geq 2000 \text{ s}, & \quad \sigma = 0 \end{aligned} \quad (10.117)$$

Silindirin boyutları $l=10[\text{cm}]$ ve $r=2[\text{mm}]$ dir.

Aşağıdaki şekillerde verilerin grafiği görülmektedir.



Şekil 10.20.a , 10.1.1.12 Örnek-5

$$\varepsilon = \phi r / \ell \quad (10.118)$$

için;

$$\phi(t) = \frac{\ell}{r} \sum J(t - \theta) \Delta \sigma(\theta) \quad (10.119)$$

Burulma açısı ise sırasıyla farklı zamanlarda farklı değerleri alır:

$t = 1$ s:

$$\phi = \frac{100}{2} \times [1.4678 - 0.8730 \exp(-0.5268 \times 1)] \times 10^{-9} \times 10^6 = 0.0476 \text{ rad}$$

$t = 600$ s:

$$\phi = \frac{100}{2} \times [1.4678 - 0.8730 \exp(-0.5268 \times 600)] \times 10^{-9} \times 10^6 = 0.0734 \text{ rad}$$

$t = 1001$ s:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{100}{2} \times [1.4678 - 0.8730 \exp(-0.5268 \times 1001)] \times 10^{-9} \times 10^6 \\ &+ \frac{100}{2} \times [1.4678 - 0.8730 \exp(-0.5268 \times 1)] \times 10^{-9} \times 10^6 = 0.121 \text{ rad} \end{aligned}$$

$t = 1800$ s:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{100}{2} \times [1.4678 - 0.8730 \exp(-0.5268 \times 1800)] \times 10^{-9} \times 10^6 \\ &+ \frac{100}{2} \times [1.4678 - 0.8730 \exp(-0.5268 \times 800)] \times 10^{-9} \times 10^6 \\ &= 0.1468 \text{ rad} \end{aligned}$$

$t = 3600$ s:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{100}{2} \times [1.4678 - 0.8730 \exp(-0.5268 \times 3600)] \times 10^{-9} \times 10^6 \\ &+ \frac{100}{2} \times [1.4678 - 0.8730 \exp(-0.5268 \times 2600)] \times 10^{-9} \times 10^6 \\ &+ \frac{100}{2} \times [1.4678 - 0.8730 \exp(-0.5268 \times 1600)] \times 10^{-9} \times (-2) \times 10^6 \\ &\cong 0 \text{ rad} \end{aligned}$$

(10.120)

10.1.1.12 Örnek-6

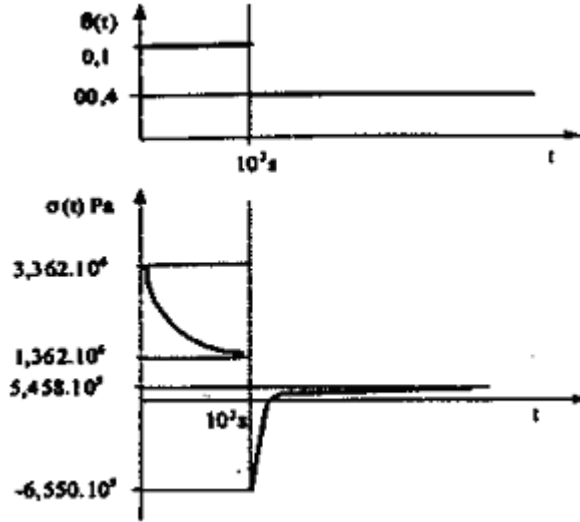
10[cm] boyunda ve 2[mm] yarıçapında bir silindirik kol düşünülürse ve bu kolun kayma modülü:

$$G(t) = 0.6812 + \exp(-1.3t) \text{ GPa} \quad (10.121)$$

(10.96.a) $t=1[s]$, $10[\text{min}]$, $1001[s]$, $30[\text{min}]$ ve $1[h]$ anındaki gerilmeleri bulmak gerekirse:

$$\begin{aligned} t < 0, & \quad \theta = 0 \\ 0 \leq t < 1000 s & \quad \theta = 0.1 \\ 1000 s \leq t < \infty & \quad \theta = 0.04 \end{aligned} \quad (10.122)$$

\mathcal{G} bu örnekte radyan olarak burulma açısını göstermektedir.



Şekil 10.20 b , 10.1.1.12 Örnek-6

$$\varepsilon = r\phi/l \quad (10.123)$$

için

$$\sigma(t) = \frac{r}{l} \sum G(t-t') \Delta\theta(t') \quad (10.124)$$

Sırasıyla:

$$t = 1 \text{ s:}$$

$$\sigma = \frac{2 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-2}} [0.6812 + \exp(-1.3 \times 1)] \times 10^9 \times 0.1 = 1.907 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$t = 600 \text{ s:}$$

$$\sigma = \frac{2 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-2}} [0.6812 + \exp(-1.3 \times 600)] \times 10^9 \times 0.1 = 1.362 \times 10^6 \text{ Pa}$$

$$t = 1001 \text{ s:}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-2}} \{ [0.6812 + \exp(-1.3 \times 1001)] \times 10^9 \times 0.1 \\ &\quad + [0.6812 + \exp(-1.3 \times 1)] \times 10^9 \times (0.04 - 0.1) \} \\ &= 2.18 \times 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

$$t = 1800 \text{ s:}$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-2}} \{ [0.6812 + \exp(-1.3 \times 1800)] \times 10^9 \times 0.1 \\ &\quad + [0.6812 + \exp(-1.3 \times 800)] \times 10^9 \times (0.04 - 0.1) \} \\ &= 5.458 \times 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

(10.125)

Gerilmedeki bu artış “hafıza” etkisinin daha önceki uzamalardan kaynaklandığını gösterir. Gerilmenin sıfır olduğu zaman ise:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2 \times 10^{-3}}{10 \times 10^{-2}} \{ [0.6812 + \exp(-1.3t)] \times 10^9 \times 0.1 \\ &\quad + [0.6812 + \exp(-1.3(t - 1000))] \times 10^9 \times (0.04 - 0.1) \} = 0 \end{aligned} \quad (10.125)$$

yaklaşık olarak $t=1000.6[s]$. Bu zamanda pozitif gerilme adımı negatif olan adımla dengelenmiş ve gerilme sıfır olmuştur.

10.1.1.12 Örnek-7

$$\frac{d}{dt} \int_0^t G(t-\theta)J(\theta) d\theta = \int_0^t \frac{dG(u)}{du} J(t-u) du + G_g J(t) = 1 \quad (10.126)$$

olduğunu göstermek gerekirse:

$$\frac{d}{dt} \int_0^t G(t-\theta)J(\theta) d\theta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_0^{t+\Delta t} G(t+\Delta t-\theta)J(\theta) d\theta - \int_0^t G(t-\theta)J(\theta) d\theta}{\Delta t} = 1 \quad (10.127)$$

Üstteki eşitliğin sağ tarafı aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_0^t [G(t+\Delta t-\theta) - G(t-\theta)]J(\theta) d\theta + \int_t^{t+\Delta t} G(\Delta t)J(\theta) d\theta}{\Delta t} = 1 \quad (10.128)$$

Eşitlik aşağıdaki formu alır:

$$\int_0^t \left[-\frac{dG(t-\theta)}{d\theta} \right] J(\theta) d\theta + G_g J(t) = 1 \quad (10.129)$$

Üstteki eşitlikte $dG(t-\theta)/dt = -dG(t-\theta)/d\theta$ ve $G_g = G(0)$ olduğu göz önünde bulundurulmuştur. $u = t - \theta$ değişken dönüşümü yapılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_0^t \frac{dG(u)}{du} J(t-u) du + G_g J(t) = 1 \quad (10.130)$$

10.1.1.12 Örnek-8

Aşağıdaki eşitliği

$$\int_0^t \frac{dJ(u)}{du} G(t-u) du + J_g G(t) = 1 \quad (10.131)$$

şartları

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= 0 & t < 0 \\ \sigma(t) &= \varepsilon G(t) & t > 0 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanmış bir viskoelastik malzeme için elde etmek istersek:

Biçim değiştirmeyi zamana bağlı olarak veren eşitlik:

$$\varepsilon = J_g \sigma(t) + \int_0^t \sigma(t-u) \frac{dJ(u)}{du} du \quad (10.132)$$

Gerilmeyi uzamanın bir fonksiyonu olarak yazmak istersek yukarıdaki eşitlik aşağıdaki biçimi alır:

$$\varepsilon = \varepsilon J_g G(t) + \varepsilon \int_0^t G(t-u) \frac{dJ(u)}{du} du \quad (10.133)$$

Böylece:

$$J_g G(t) + \int_0^t G(t-u) \frac{dJ(u)}{du} du = 1 \quad (10.134)$$

elde edilir.

10.1.1.12 Örnek-9

Viskoelastik malzeme için, $\sigma = \sigma_0 H(t)$ olduğunda, $H(t)$ birim basamak fonksiyonu olmak üzere, bu malzemenin aşağıdaki eşitliği doğruladığını göstermek gerekirse:

$$H(t) = \int_0^t G(t-\theta) dJ(\theta) \quad (10.135)$$

Aşağıdaki eşitlikte:

$$\sigma(t) = \int_0^t G(t-\theta) \frac{d\varepsilon(\theta)}{d\theta} d\theta = \sigma_0 \int_0^t G(t-\theta) dJ(\theta) \quad (10.136)$$

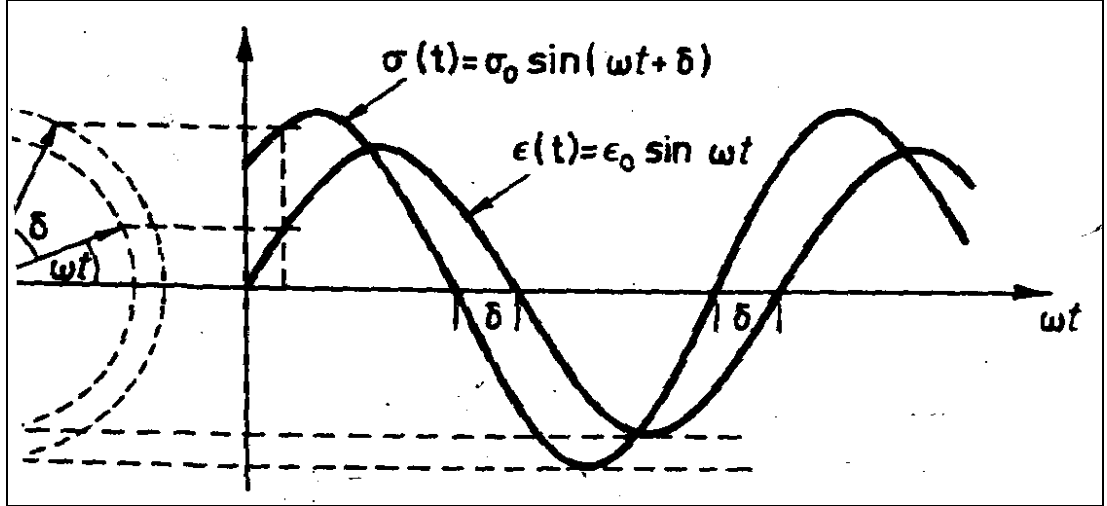
$\sigma = \sigma_0 H(t)$ olduğundan istenen eşitlik sağlanmış olur.

10.1.2 Dinamik Viskoelastisite Kuramsal Altyapı

ε_0 genlik ve ω açısal hız [rad/s] olmak üzere $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t$ şeklinde bir sinüzoidal yer değiştirme tahrikinin, viskoelastik bir katıya, kayma gerilmesi cevabı oluşturacak biçimde uygulandığını düşünürsek, ileride ayrıntılarıyla değinileceği üzere, cismin kaydettiği yer değiştirmeye, okunan kuvvet arasındaki kayı açısı (faz açısı değil) δ 'nın da eşitliğe girmesiyle, gerilme cevabı aşağıdaki halini alır.

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma_0 \sin(\omega t + \delta) \\ &= \sigma_0 \cos \delta \sin \omega t + \sigma_0 \sin \delta \cos \omega t \end{aligned} \quad (10.137)$$

Bölüm 16.2.1'de ayrıntılarıyla değinileceği üzere, ilgili yer değiştirme tahriki ve okunan gerilme cevabı arasındaki ilişki, aşağıdaki grafikte verildiği gibi olur.



Şekil 10.21 Sinüzoidal yer değiştirme tahriki ve hasil δ kayıp açısına haiz okunan gerilme cevabı

$t - \theta = u$ ve $G(t) = G_e + G_d \Phi(t)$ değişken dönüşümü yapılp, u 'ya göre sıfırdan sonsuza kadar integre edildiğinde (zaman sonsuza ıraksarken gerilme cevabındaki değişimi görmek adına) eşitlik aşağıdaki gibi elde edilir. Buradaki dikkat edilmesi gereken unsur, bu bölümde yer alan tüm θ ların, bir önceki bölüm olan 10.1.1'de de değinildiği üzere, zamanı ifade ettiğidir, ki bu θ , "Dinamik Laboratuvar Denek Testleri ve Kuramsal Altyapısı" başlıklı bölüm 16.2'de "faz açısı" olarak geçecek θ 'yla karıştırılmamalıdır. Bu bölümde faz açısı ϕ ile gösterilecek ve bölüm 16.2'de, tekrar θ 'yla ifade edilmeye başlandığına dair ek bir uyarıda bulunulmayacaktır.

$$\begin{aligned}
 \sigma(t) &= \int_{-\infty}^t [G_e + G_d \Phi(t - \theta)] \frac{\partial \epsilon(\theta)}{\partial \theta} d\theta \\
 &= \epsilon_0 \left[\omega G_d \int_0^{\infty} \Phi(u) \cos \omega u du \right] \cos \omega t + \epsilon_0 \left[G_e + \omega G_d \int_0^{\infty} \Phi(u) \sin \omega u du \right] \sin \omega t \\
 &= \epsilon_0 [G'(\omega) \sin \omega t + G'' \cos \omega t]
 \end{aligned}
 \tag{10.138}$$

ifadeden $G'(\omega)$ için $G(t) = G_e + G_d \Phi(t)$ eşitliğinde $t = \omega$ yapılırsa, reel ve imajiner bileşen $G'(\omega)$ ve $G''(\omega)$

$$\begin{aligned}
 G'(\omega) &= G_e + \omega G_d \int_0^{\infty} \Phi(t) \sin \omega t dt \\
 &= G_e + \omega \int_0^{\infty} [G(t) - G_e] \sin \omega t dt
 \end{aligned}
 \tag{10.139.a}$$

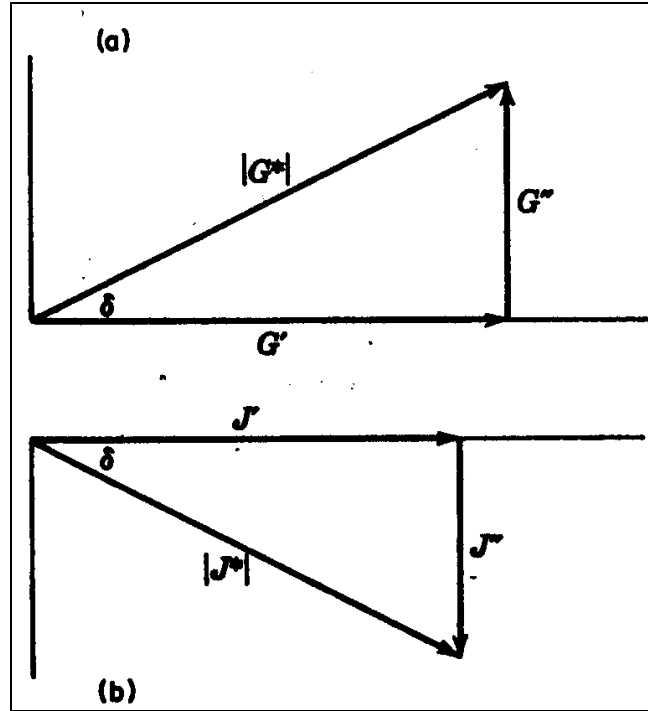
$$G''(\omega) = \omega G_d \int_0^\infty \Phi(t) \cos \omega t dt = \omega \int_0^\infty [G(t) - G_e] \cos \omega t dt \quad (10.139.b)$$

Yukarıdaki iki ifade, gerilimi veren eşitlik (10.)'da yerlerine konulursa

$$\begin{aligned} G'(\omega) &= \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \cos \delta \\ G''(\omega) &= \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \sin \delta \\ \tan \delta &= \frac{G''(\omega)}{G'(\omega)} \end{aligned} \quad (10.140)$$

$G'(\omega)$ ve $G''(\omega)$, kompleks relaksasyon modülü $G^*(\omega)$ 'nin bileşenleridir.

Aşağıda yeralan şekil 10.2.2'de , kompleks relaksasyon modülü $G^*(\omega)$,kompleks uyum fonksiyonu $J(\omega)$ ve bileşenleri vektörel gösterimleriyle verilmiştir.



Şekil 10.22 kompleks relaksasyon modülü $G^*(\omega)$,kompleks uyum fonksiyonu $J(\omega)$ ve bileşenlerinin vektörel gösterimleri. Yatay eksen gerinim, düşey eksen gerilme

Kompleks ifade ediliş biçimi kullanıldığında, sinüzoidal yer değiştirme tahriki ve okunan gerilme cevabı sırasıyla $\mathcal{E}^*(\omega) = \epsilon_0 \text{Im}(e^{i\omega t})$ ve

$\sigma^*(\omega) = \sigma_0 \operatorname{Im}(e^{i\omega t})$ biçiminde yazılır. Bu doğrultuda kayma gerilmesi ve birim yer değiştirme arasındaki ilişki aşağıdaki halini alır.

$$G^*(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} e^{i\delta} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} (\cos \delta + i \sin \delta) \quad (10.141)$$

10.1.2.1 Relaksasyon Fonksiyonunun Frekans Boyutundan Zaman Boyutuna Çevrilmesi

(10.139.a) ve (10.139.b) ifadeleri, $G'(\omega)$ ve $G''(\omega)$ 'nin, relaksasyon modülüne ait sinüs ve kosinüs Fourier dönüşümleri olduklarını ifade eder. İntili eşitlikleri yazmak gerekirse

$$\begin{aligned} \frac{G'(\omega) - G_e}{\omega} &= \mathcal{F}_s[G(t) - G_e] \\ \frac{G''(\omega)}{\omega} &= \mathcal{F}_c[G(t) - G_e] \end{aligned} \quad (10.142)$$

Yukarıdaki ifadelerde yeralan F_s ve F_c , sinüs ve kosinüs Fourier dönüşümleri sembolleridir. Relaksasyon modülü $G(t)$, aşağıda verildiği üzere, eşitlik (10.142)'nin ters Fourier dönüşümünden de elde edilebilir.

$$\begin{aligned} G(t) &= G_e + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{G'(\omega) - G_e}{\omega} \sin \omega t \, d\omega \\ G(t) &= G_e + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{G''(\omega)}{\omega} \cos \omega t \, d\omega \end{aligned} \quad (10.143)$$

10.1.2.2 Kompleks Viskoelastisite

Viskoelastisitenin verilmiş bulunan tanımıyla uyumlu olarak, kompleks kayma gerilmesi, kompleks kayma birim yerdeğiştirmesi ve kompleks viskozite $\eta^*(\omega)$ ile aşağıdaki gibi ilişkilendirilebilmektedir.

$$\sigma^*(\omega) = \eta^*(\omega) \frac{d\epsilon^*(\omega)}{dt} = i\omega \epsilon^*(\omega) \eta^*(\omega) \quad (10.144)$$

İfadeden kompleks viskozite $\eta^*(\omega)$ çekilip, $\frac{\sigma^*}{\mathcal{E}^*} = G^*$ olduğu gözönünde bulundurulursa

$$\eta^*(\omega) = \eta'(\omega) - i\eta''(\omega) = \frac{G^*(\omega)}{i\omega} = \frac{G''(\omega)}{\omega} - i\frac{G'(\omega)}{\omega} \quad (10.145)$$

Bu bağlamda kompleks viskozite $\eta^*(\omega)$ 'nin reel ve imajiner bileşenlerini ayrı ayrı yazmak gerekirse sırasıyla

$$\eta'(\omega) = \frac{G''(\omega)}{\omega} \quad (10.146)$$

$$\eta''(\omega) = \frac{G'(\omega)}{\omega} \quad (10.147)$$

(10.146) ifadesi, sıvıların viskozitesinin, dinamik testlerin sonuçlarından, sıfır kayma oranında, aşağıdaki ifade yardımıyla hesaplanabileceğini öngörür.

$$\eta_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{G''(\omega)}{\omega} \quad (10.148)$$

10.1.2.3 Dinamik Relaksasyon Testlerinde Disipasyon Enerjisi

$\mathcal{E}^* = \mathcal{E}_0 \text{Im}(e^{i\omega t})$ gibi sinüzoidal bir yer değiştirme tahrikine maruz kalan bir cismin çevrim başına yaptığı iş aşağıda verilen ifadeyle hesaplanır.

$$\begin{aligned} W &= \oint \sigma^* d\mathcal{E}^* = \oint [G'(\omega) + iG''(\omega)] \mathcal{E}^* d\mathcal{E}^* \\ &= \frac{1}{2} G'(\omega) \oint d\mathcal{E}^{*2} + \frac{G''(\omega)}{\omega} \oint \dot{\mathcal{E}}^* d\mathcal{E}^* \end{aligned} \quad (10.149)$$

ki bu ifadedeki parantezlerin açılımıyla ortaya çıkacak çarpan $i\mathcal{E}^*$ ın

$$i\mathcal{E}^* = \frac{\left(\frac{1}{\omega}\right) d\mathcal{E}^*}{dt} \quad (10.150)$$

olduğu gözönünde bulundurulmalıdır. İfadedeki $G'(\omega)$ li integral için, $G'(\omega)$ in Şekil 10.22'deki birim yer değiştirme boyunca, sıfır gerilmede seyir ettiği

hatırlanacak olursa, çevrimin yükleme ve boşaltma eğrilerine ait $G'(\omega)$ bileşenlerinin çakışık ve zıt yönlü iki vektör oldukları anlaşılacak, bu iki çakışık vektörün seyir boyunca sıfır gerilmede kalmasının doğrudan doğruya doğal bir sonuç olarak, $G'(\omega)$ li integralin değerinin sıfır olduğu netlik kazanacaktır. Dolayısıyla, biriktirilen enerji miktarıyla ilişkili olduğundan, $G'(\omega)$ birikme (storage) relaksasyon modülü diye anılacaktır. $G''(\omega)$ ise kayıp relaksasyon modülü diye anılır ve böylelikle, aşağıda ifade edildiği üzere, tüm bir çevrimde yapılan toplam iş, disipasyon enerjisini temsil eder.

$$W = G''(\omega) \epsilon_0^2 \omega \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t \, dt = \pi \epsilon_0^2 G''(\omega) \quad (10.151)$$

ki bu ifadede $d\mathcal{E}^* = \left(\frac{d\mathcal{E}^*}{dt} \right) dt$ olduğu hatırlatılmalıdır.

10.1.2.4 Dinamik Sürünme Uyum Fonksiyonu

$\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t)$ gibi sinüzoidal bir kayma gerilmesine maruz kalan bir cismin, yer değiştirme cevabını veren ifadede, aşağıda verildiği üzere, φ kadar bir gecikme hasıl olur. (faz açısı)

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \varphi) \quad (10.152)$$

$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \operatorname{Im}(e^{i(\omega t - \varphi)})$ nin $\sigma(t) = \sigma_0 \operatorname{Im}(e^{i\omega t})$ a olan oranına kompleks sürünme uyum fonksiyonu denir ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$J(\omega)^* = J'(\omega) - iJ''(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sigma_0} e^{-i\varphi} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sigma_0} (\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)) \quad (10.152)$$

Buradan yola çıkarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$J'(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sigma_0} \cos(\varphi) \quad J''(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sigma_0} \sin(\varphi) \quad \tan \varphi = \frac{J''(\omega)}{J'(\omega)} \quad (10.153)$$

Kompleks dinamik sürünme uyum fonksiyonunun vektörel bileşenlerinin grafik gösterimi daha önce verilmiş bulunan Şekil 10.22 üzerinde incelenebilir.

Verilmiş bulunan ifadeler arasında ilgili karşılaştırmalar yapıldığında aşağıdaki iki eşitliğin yazılabileceği aşikardır.

$$\begin{aligned} J^*(\omega) &= \frac{1}{G^*(\omega)} \\ \tan[\delta(\omega)] &= \frac{G''(\omega)}{G'(\omega)} = \frac{J''(\omega)}{J'(\omega)} \end{aligned} \quad (10.154)$$

Bu doğrultuda dinamik sürünme fonksiyonun reel ve imajiner bileşenleri, dinamik relaksasyon fonksiyonunun ilgili reel ve imajiner bileşenleri cinsinden aşağıda verildiği gibi ifade edilebilir.

$$J'(\omega) = \frac{1}{G'(\omega)(1 + \tan^2 \varphi(\omega))} \quad (10.155)$$

$$J''(\omega) = \frac{1}{G''(\omega)(1 + \cotan^2 \varphi(\omega))} \quad (10.156)$$

Bu son iki ifadeden $J'(\omega)$, $\varphi \approx 0$ için $J'(\omega) = \frac{1}{G'(\omega)}$ ve $J''(\omega)$ de $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$ için $J''(\omega) = \frac{1}{G''(\omega)}$ halini alır. Bir başka deyişle, disipasyon enerjisinin çok küçük olduğu yüksek frekanslarda, $J'(\omega)$, $G'(\omega)$ in resiprokali olmaya yaklaşır (yukarıdaki (10. 155) eşitliğinde, $\omega \rightarrow 0$ iken $\tan^2 \delta(\omega) \rightarrow 0$ olduğundan), düşük frekanslarda ise (10.156) eşitliğinde, $\omega \rightarrow \pi/2$ iken $\cotan^2 \delta(\omega) \rightarrow 0$ olduğundan, $J'(\omega)$, $1/G'(\omega)$ ya yaklaşır. $0 < \omega < \infty$ aralığındaysa genel olarak aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir.

$$J'(\omega) \leq \frac{1}{G'(\omega)} \quad J''(\omega) \leq \frac{1}{G''(\omega)} \quad (10.157)$$

10.1.2.5 Viskoelastik Katılar İçin Uyum Fonksiyonunun Frekans Boyutundan Zaman Boyutuna Çevrilmesi

Boltzman üst üste ekleme (süperpozisyon) prensibi doğrultusunda, viskoelastik malzemenin, harmonik bir kayma gerilmesi altında sergilediği kayma biçim değiştirmesi aşağıdaki gibi ifade edilebilmektedir.

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t) &= \int_{-\infty}^t J(t-\theta) \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} d\theta \\
&= \int_{-\infty}^t \{ [J_g + J_d \Psi(\infty)] - J_d [\Psi(\infty) - \Psi(t-\theta)] \} \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} d\theta \\
&= \sigma(t) J_e - \int_{-\infty}^t J_d [\Psi(\infty) - \Psi(t-\theta)] \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} d\theta
\end{aligned} \tag{10.158}$$

ki bu ifadedeki $J(t) = J_g + J_d \Psi(t)$, $J_e = J_g + J_d \Psi(\infty)$, $\sigma(-\infty) = 0$ (bkz. Bölüm 10.1.1'deki ilgili ifadeler) Bu bağlamda yukarıdaki eşitlik

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t) &= J_e \sigma_0 \sin \omega t - \sigma_0 \omega J_d \int_0^\infty [\Psi(\infty) - \Psi(u)] \cos \omega(t-u) du \\
&= \sigma_0 [J'(\omega) \sin \omega t - J''(\omega) \cos \omega t]
\end{aligned} \tag{10.159}$$

halini alır ve $u = t - \theta$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$J'(\omega) = J_e - \omega J_d \int_0^\infty [\Psi(\infty) - \Psi(t)] \sin \omega t dt \tag{10.160}$$

$$J''(\omega) = \omega J_d \int_0^\infty [\Psi(\infty) - \Psi(t)] \cos \omega t dt \tag{10.161}$$

eşitlikleri aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$J'(\omega) = J_e - \omega \int_0^\infty [J_e - J(t)] \sin \omega t dt \tag{10.162}$$

$$J''(\omega) = \omega \int_0^\infty [J_e - J(t)] \cos \omega t dt \tag{10.163}$$

ifadeleri , Bölüm 10.1.2.1'deki gibi sinüs ve kosinüs Fourier dönüşümleri cinsinden yazılmak istenirse

$$\begin{aligned}
\frac{J'(\omega) - J_e}{\omega} &= -\mathcal{F}_s[J_e - J(t)] \\
\frac{J''(\omega)}{\omega} &= \mathcal{F}_c[J_e - J(t)]
\end{aligned} \tag{10.164}$$

(10.164) ifadesinin ters fourier dönüşümü, sürünme uyum fonksiyonunun frekans boyutundan zaman boyutuna çevrilmiş ifadesini, aşağıda görüldüğü gibi, elde etmemizi sağlar.

$$J(t) = J_e + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{J'(\omega) - J_e}{\omega} \sin \omega t \, d\omega \quad (10.165)$$

$$J(t) = J_e - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{J''(\omega)}{\omega} \cos \omega t \, d\omega \quad (10.166)$$

10.1.2.6 Dinamik Sürünme Testlerinde Disipasyon Fonksiyonu

$\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t)$ gibi sinüzoidal bir kayma gerilmesine maruz kalan viskoelastik bir cismde çevrim başına yapılan iş aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$W = \oint \sigma^* d\varepsilon^* = \oint \sigma^* \frac{d\varepsilon^*}{dt} dt \quad (10.167)$$

(10.159) eşitliği gözönünde bulundurulursa ifade aşağıdaki halini alır.

$$W = \sigma_0^2 \omega \left[\int_0^{2\pi/\omega} J'(\omega) \sin \omega t \cos \omega t \, dt + \int_0^{2\pi/\omega} J''(\omega) \sin^2 \omega t \, dt \right] \quad (10.168)$$

İfadedeki $J'(\omega)$ li integral için, $J'(\omega)$ in Şekil 10.22'deki birim yer değiştirme boyunca, sıfır gerilmede seyir ettiği hatırlanacak olursa, çevrimin yükleme ve boşaltma eğrilerine ait $J'(\omega)$ bileşenlerinin çakışık ve zıt yönlü iki vektör oldukları anlaşılacak, bu iki çakışık vektörün seyir boyunca sıfır gerilmede kalmasının doğruduğu doğal bir sonuç olarak, $J'(\omega)$ li integralin değerinin sıfır olduğu netlik kazanacaktır. Bu bağlamda yukarıdaki ifade

$$\frac{W}{\text{çevrim}} = \pi \sigma_0^2 J''(\omega) \quad (10.169)$$

biçiminde yazılabilir, ki eşitliğin bu son hali incelenecek olursa, disipasyon enerjisinin, tahrik kayma gerilmesinin genliğinin karesi ve kayıp kayma uyum fonksiyonuyla doğru orantılı olduğu görülür.

10.1.2.7 Kompleks Sürünme Uyum Fonksiyonunun Düşük Frekanslardaki Çözümlemesi

(10.162) ve (10.163) ifadeleri doğrultusunda, katı cisimler için $\omega \rightarrow \infty$ iken, sürünme uyum fonksiyonunun reel ve imajiner bileşenleri sırasıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$J'(\omega) = J_e - \omega^2 \int_0^\infty t[J_e - J(t)] dt \quad (10.170)$$

$$J''(\omega) = \omega \int_0^\infty [J_e - J(t)] dt \quad (10.171)$$

$\omega \rightarrow \infty$ iken $\sin(\omega t) \cong \omega t$ ve $\cos(\omega t) \cong 1$ olduğundan yukarıdaki iki ifade $J'(0) \cong J_e$ ve $J''(0) \cong 0$ halini alır. Düşük frekanslarda, katı cisimler için aşağıdaki iki ifade geçerliliğini korumaya devam eder.

$$J_e - J'(\omega) \sim \omega^2; \quad J''(\omega) \sim \omega \quad (10.172)$$

Bu iki ifadenin ilkinin $J'(\omega) \cong J_e - \omega^2$ biçiminde düzenlersek, sürünme fonksiyonunun reel bileşeninin frekansın karesi kadar bir farkla azaldığı, buna karşın ikinci ifadedeki kayıp sürünme fonksiyonunun frekansla doğru orantılı arttığı görülür.

10.1.2.8 Kompleks Relaksasyon Modülünün Düşük Frekanslardaki Çözümlemesi

(10.143) ifadesindeki sinüslü terim integralden cosinüs olarak çıkacağı ve $\omega \rightarrow 0$ iken $\cos(\omega) \rightarrow 1$ olduğundan (10.143) ifadesi doğrultusunda $G'(0) \cong G_e$ olur ve (10b) ifadesindeki cosinüslü terim integralden sinüs olarak çıkacağı ve $\omega \rightarrow 0$ iken $\sin(\omega) \rightarrow 0$ olduğundan (10b) ifadesi doğrultusunda $G''(0) \cong 0$ biçiminde elde edilir.

10.1.2.9 Sıfır Kayma Yer Değiştirmesi Durumundaki Viskozite ve Durağan Konumdaki Sürünme Uyum Fonksiyonunun Viskoelastik Fonksiyon Terimleri Cinsinden İfade Edilmesi

$\omega \rightarrow 0$ iken (10b) ifadesinin limiti alınacak olursa

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G''(\omega) \cong \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \int_0^{\infty} G(t) \cos \omega t dt = \omega \int_0^{\infty} G(t) dt \quad (10.173)$$

eşitliği elde edilir ve beraberinde (10. 148) ifadesinin gözönünde bulundurulursa, sıfır kayma yer değiştirmesi durumundaki viskoziteyle kayma relaksasyon modülü arasındaki bağıntı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\eta_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{G''(\omega)}{\omega} = \int_0^{\infty} G(t) dt \quad (10.174)$$

Diğer bir önemli bağıntı da durağan konumdaki sürünme uyum fonksiyonundan elde edilir. $J^*(\omega) = \frac{1}{G^*(\omega)}$ olduğundan, kompleks relaksasyon

modülünün reel ve imajiner bileşenleri, kompleks sürünme uyum fonksiyonunkilerle aşağıda verilen ilişkiye haiz olur.

$$\begin{aligned} G'(\omega) + iG''(\omega) &= \frac{1}{J'(\omega) - iJ''(\omega)} \\ &= \frac{J'(\omega)}{J'^2(\omega) + J''^2(\omega)} + i \frac{J''(\omega)}{J'^2(\omega) + J''^2(\omega)} \end{aligned} \quad (10.175)$$

Düşük frekanslar için kompleks relaksasyon modülünün reel bileşeni aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G'(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{J'(\omega)}{J'^2(\omega) + J''^2(\omega)} \cong \frac{J_e^0}{J_e^{02} + 1/(\omega\eta)^2} \quad (10.176)$$

ki bu ifadede $\omega \rightarrow 0$ iken $J''(\omega) \cong \frac{1}{\omega\eta}$ olduğu öngörülmüştür. ([9]sf. 248 eşitlik

6.29b) Bu doğrultuda $J_e^0(\omega) \ll \frac{1}{\omega\eta}$ olduğundan

$$J_e^0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\eta^2} \left(\frac{G'(\omega)}{\omega^2} \right) \right] \quad (10.177)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade denge konumundaki sürünme fonksiyonunun relaksasyon modülü bileşenleri cinsinden ifade edilmiştir. Bu ifade, viskoelastik

sıvıların düşük frekanslardaki relaksasyon modülüne ait reel bileşeni için, $\omega \rightarrow 0$ iken limiti alınmış hali olan

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G'(\omega) \cong \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega \int_0^{\infty} G(t) \sin \omega t dt = \omega^2 \int_0^{\infty} t G(t) dt \quad (10.178)$$

ifadesiyle birarada değerlendirildiğinde (10.177) eşitliği aşağıdaki halini alır.

$$J_e^0 = \frac{\int_0^{\infty} t G(t) dt}{\eta^2} = \frac{\int_0^{\infty} t G(t) dt}{\left[\int_0^{\infty} G(t) dt \right]^2} \quad (10.179)$$

10.1.2.10 Krönig-Kramers Bağlantıları

Doğrusal viskoelastisite kuramı, kompleks relaksasyon modülü bileşenlerinin birinin diğeri cinsinden ifade edilebileceğini, diğer bir deyişle birinin deneysel verilerden yola çıkarak hesaplanmasının ardından, diğerine Krönig-Kramers bağlantıları yardımıyla ulaşılabileceğini öngörür. Bu bağlamda (10.143) ve (10.139.a) ifadeleri birarada değerlendirildiğinde aşağıda yeralan eşitlik yazılabilir.

$$G'(\omega) - G_e = \frac{2}{\pi} \omega \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \frac{G''(x)}{x} dx \int_0^R \sin \omega t \cos xt dt \quad (10.180)$$

yanısıra

$$\sin \omega t \cos xt = \frac{1}{2} [\sin(\omega - x)t + \sin(\omega + x)t] \quad (10.181)$$

olduğu dikkate alınırsa (10.180) ifadesi aşağıdaki halini alır.

$$\begin{aligned} G'(\omega) - G_e &= \frac{2}{\pi} \omega \int_0^{\infty} \frac{G''(x)}{x} \left[\frac{\omega}{\omega^2 - x^2} - \frac{1}{2} \right. \\ &\quad \times \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{\cos(\omega - x)R}{\omega - x} + \frac{\cos(\omega + x)R}{\omega + x} \right] \left. \right] dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G''(x) \frac{\omega^2}{\omega^2 - x^2} d \ln x \end{aligned} \quad (10.182)$$

Bu ifadedeki kosinüslü terimlerin integrallerinin sıfır olacağı gözönünde bulundurulmalıdır. İfadedeki relaksasyon, $\omega \rightarrow \infty$ iken $G'(\omega) - G_e$ ifadesinin limitinin alınmasıyla, aşağıda verildiği üzere, hesaplanabilir.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} [G'(\omega) - G_e] = G_g - G_e = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G''(x) d \ln x \quad (10.183)$$

Bu ifadesinden çıkacak G_e değeri (10.182) ifadesinde yerine konulduğunda ([9] sf254 eşitlik 6.57 ve 6.58) $G'(\omega)$ ve $G''(\omega)$ arasındaki diğer bir bağıntı olan aşağıdaki ifade ortaya çıkar.

$$G'(\omega) = G_g - \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G''(x) \frac{x^2}{\omega^2 - x^2} d \ln x \quad (10.184)$$

Aynı şekilde (10.139.a) eşitliğinden çekilen $G(t) - G_e$ (10.b) ifadesinde yerine konulduğunda aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$G''(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{\omega(G'(x) - G_e)}{x} \sin xt \cos \omega t dt dx. \quad (10.185)$$

Aynı işlemler $G''(\omega)$ için tekrarlanırsa aşağıdaki eşitlik elde edilmiş olur.

$$G''(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega x [G'(x) - G_e]}{x^2 - \omega^2} d \ln x \quad (10.186)$$

(10.182) ve (10.185) ifadeleri, taranan tüm frekans aralıklarındaki kayıp relaksasyon modülü bilindiğinde, birikme relaksasyon modülünün hesaplanmasında kullanılır.

10.1.2.11 Yığılma Sürünme Uyum Fonksiyonunun Elde Edilmesi

Neredeyse sıkıştırılmaz kabul edilen kauçuk, hamur reçetesi ve pişme parametreleri ölçüsünde oranı değişmekle beraber, bir miktar sıkıştırılabilmektedir. Bölüm 15'te ayrıntılarıyla açıklanıp, deneysel verilerden yola çıkılarak

$$K = \frac{P}{\Delta V/V_0} \quad (10.187)$$

ifadesi doğrultusunda hesaplanacak olan yığılma modülü (p uygulanan en yüksek basma gerilmesi V_0 başlangıç hacmi ve ΔV hacim değişimi, K yığılma modülü) ile ilişkili olarak, her yönden aynı basıncın (hidrostatik basınç) basamak fonksiyonu olarak uygulandığı viskoelastik cismin yığılma modülünün zamana bağlı değişimini veren fonksiyon olan yığılma sürünme uyum fonksiyonu $B(t)$ 'nin yanısıra, aynı

hacimsel sıkıştırma, sinüzoidal olarak uygulanırsa, yığılma cevabını veren fonksiyon $B^*(\omega)$ kompleks yığılma uyum fonksiyonu olarak anılır ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$B^*(\omega) = B'(\omega) - iB''(\omega) = \tilde{B}(\omega) \exp[-i\delta_\omega] \quad (10.188)$$

ki ifadede yeralan $B'(\omega)$ ve $B''(\omega)$, sırasıyla yığılma bitikme ve yığılma kayıp uyum fonksiyonları olarak anılırlar. Aralarındaki faz açısı ise (uygulanan tahrik gerilme olduğu ve alınan cevap olan yığılma modülü, hacim değişiminden, hacim değişimiye, test makinesine ait pistonun kaydettiği okunan yer değiştirmeden çıkartıldığından, okunan cevap olan kompleks yığılma sürünme fonksiyonundaki reel ve imajiner bileşenler arasındaki açı farkı da φ (faz açısı olduğu için) ile gösterilecektir. Dikkat edilecek olursa, tezin tamamı çerçevesinde, tahrik kuvveti ile karşılığında okunan yer değiştirme arasındaki açı farkının hep faz açısı, okunan yer değiştirmeye, kauçuğun sönümlemesinin arta kalan (okunan) kuvvetle arasındaki açı farkınınsa hep kayıp açı olarak adlandırıldığı görülecektir.

$$\tan \varphi_B(\omega) = \frac{B''(\omega)}{B'(\omega)} \quad (10.189)$$

Bu bağlamda Poisson oranının da, yığılma sürünmesi uyum, çekme sürünme siuyum ve kayma sürünmesi uyum fonksiyonları gibi, zamana bağlı olarak azalan ivmeyle artan bir fonksiyon olduğu (relaksasyon fonksiyonunununsa azalan ivmeyle azalan bir fonksiyon olduğu) gözönünde bulundurulur ve olabilecek en yüksek değerine (relaksasyon için en düşük değerine) sonsuz zaman sonra ulaşacağı dikkate alınır, frekansa bağlı değişimini gösteren ifadesiyle Poisson oranı aşağıdaki gibi verilir. (tahrik, yer değiştirme, cevap ise okunan gerilme yoluyla elde edilmiş olan Poisson oranı değişimi olduğu için açı farkı kayıp açı ve ifade edildiği sembol δ)

$$v(\omega) = v'(\omega) = iv''(\omega) = \tilde{v}(\omega) \exp[-i\delta_v(\omega)] \quad (10.190)$$

ki bu durumda da kayıp açının tanjantı da şu şekilde ifade bulur

$$\tan \varphi_v(\omega) = \frac{v''(\omega)}{v'(\omega)} \quad (10.191)$$

Aynı şekilde sinüzoidal tahrik karşısındaki hacim değişimi cevabı kompleks yığılma relaksasyon modülü $K^*(\omega)$ olarak ifade bulur (tahrik gerilme, cevap relaksasyon yani

yer değiştirme yoluyla elde edilen bir ifade olduğundan, aı farkı burada kayıp aı olarak ifade edilip δ ile ifade edilmiştir.)

$$K^*(\omega) = K'(\omega) + iK''(\omega) = \tilde{K}(\omega) \exp[-i\delta_K(\omega)] \quad (10.192)$$

Aynı şekilde ilgili kayıp aının tanjantı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\tan \delta_K = \frac{K''(\omega)}{K'(\omega)} \quad (10.193)$$

Son olarak , kompleks çekme sürünmesi uyum fonksyonu $D^*(\omega)$, tek eksenli sinüzoidal çekme yer değiştirmesi karşısında okunan gerilme cevabından yola çıkarak aı farkı δ ile gösterilecek, nihai çekme relaksasyon modülü $E^*(\omega)$ ise tek eksenli sinüzoidal çekme gerilmesi karşısında okunan yer değiştirme cevabından yola çıkarak hesaplandığından aı farkı ϕ ile gösterilecek, ilgili eşitlikler sırasıyla

$$D^*(\omega) = D'(\omega) - iD''(\omega) = \tilde{D}(\omega) \exp[-i\delta_D(\omega)] \quad (10.194)$$

$$E^*(\omega) = E'(\omega) - iE''(\omega) = \tilde{E}(\omega) e^{(-i\phi_E(\omega))} \quad (10.195)$$

ve ilgili kayıp aı ve faz açısı tanjantı sırasıyla aşağıda verildiği gibi ifade edilir.

$$\tan \delta_D(\omega) = \frac{D''(\omega)}{D'(\omega)} \quad \text{ve} \quad \tan \phi_E(\omega) = \frac{E''(\omega)}{E'(\omega)} \quad (10.196)$$

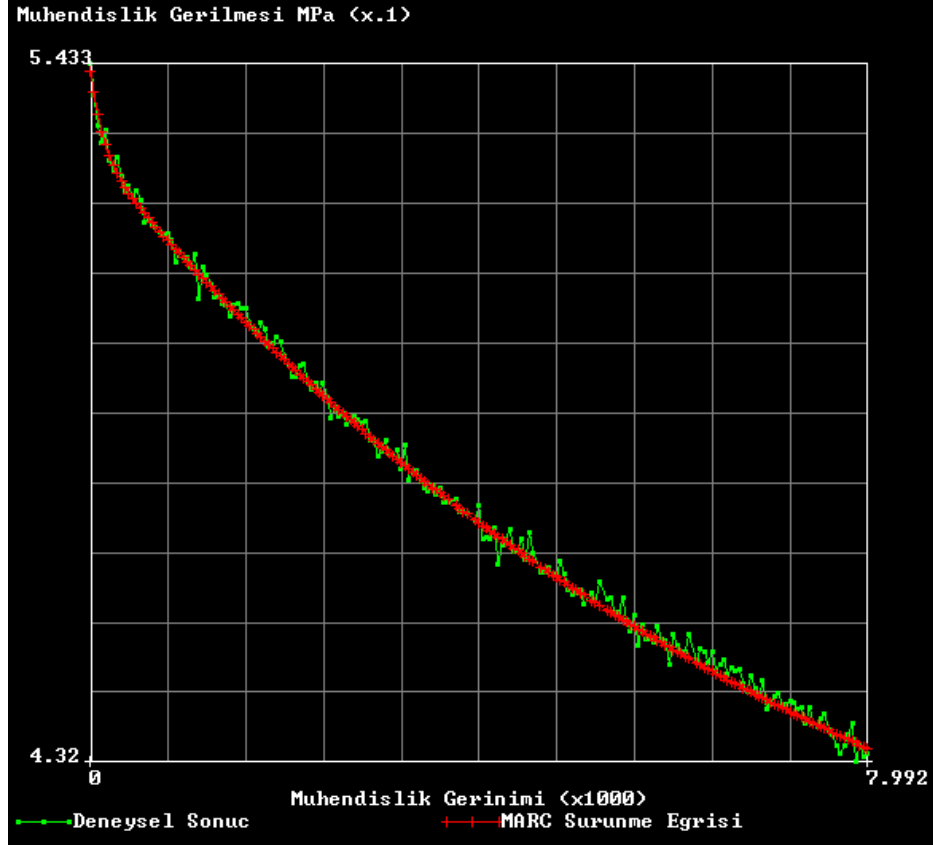
İlgili kayıp aı ve faz açıları arasında aşağıda verilmiş bağıntıların bulunduğu gözönünde bulundurulmalıdır.

$$\delta_D(\omega) = \tan \phi_E(\omega) \quad \text{ve} \quad \delta_K(\omega) = \tan \phi_B(\omega) \quad (10.197)$$

10.2 Malzemeye Ait Relaksasyon Rejiminin MARC Malzeme Modeline Aktarılması

Bu konu kapsamında verilen şekillerdeki grafiklerden yorumlanabileceği üzere viskoelastik bir malzemenin relaksasyon davranışı da, yukarıda verilen kauçuğun sürünme davranışının bir nevi ayna görüntüsü olacaktır ki bu aşağıda tariflenen süreç için MARC'tan alınmış kıyaslamalı eğrilerden de takib edilebilir.

Tek eksenli gerilme denekleri sabit yer değiştirmeye 8000s boyunca tabî tutulup , kuvvet cevabındaki düşüş rejimi MARC’a girilmiş , MARC’ın akıştırdığı Prony serisi (şekil 10.23) seçilen malzeme modeline zamana bağımlı ‘relaksasyon’ davranışı olarak eklenmiştir.

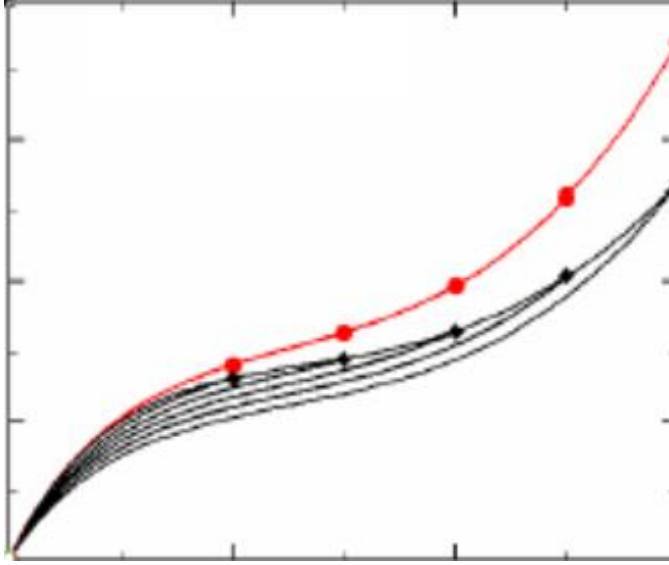


şekil 10.23. Relaksasyon Deneyel Verisine akıştırılan MARC Eğrisi

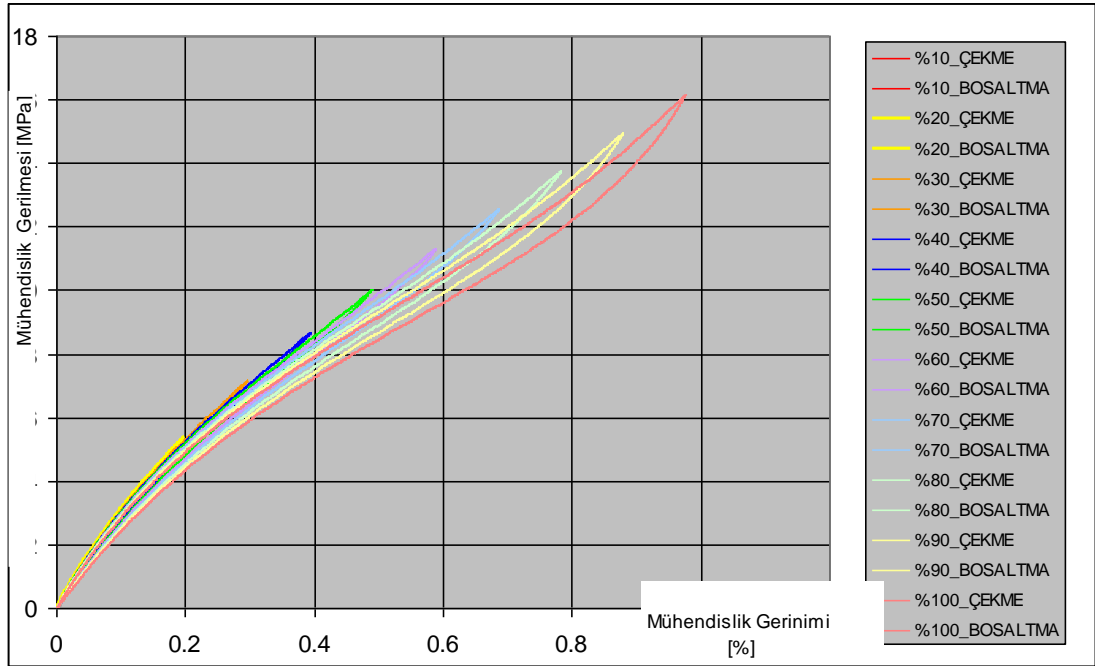
11. Seçilen Malzeme Modeline Süreksiz Hasar Özelliğinin Eklenmesi

Bu özellik kauçuğun gerinimi eş artımlı ardışık çevrimlerde , bir sonraki gerinimin yükleme eğrileri nispeten akışıkken , boşaltma eğrilerinin , büyük gerinimli olan küçük gerinimlinin altından geçecek şekilde bir davranış sergilemesidir.(şekil 11.1) Bu özelliğin MARC’a girilmesi, deneysel verilerin (şekil 11.2) şekil 11.3 (a)’daki formülasyonla bir grafik haline getirmesi ve MARC’ın buna 11.3 (b)’deki gibi bir eğri akıştırmasıyla gerçekleşir, ki bu özelliğin hedefi , birbirini izleyen değişken genlikli ömür testi histerisislerinde, histerisisin içinde kalan alanın ısıya dönüşen enerji olduğu için, ve kauçuğun rijitlik kaybı ve kırılma mekaniği de

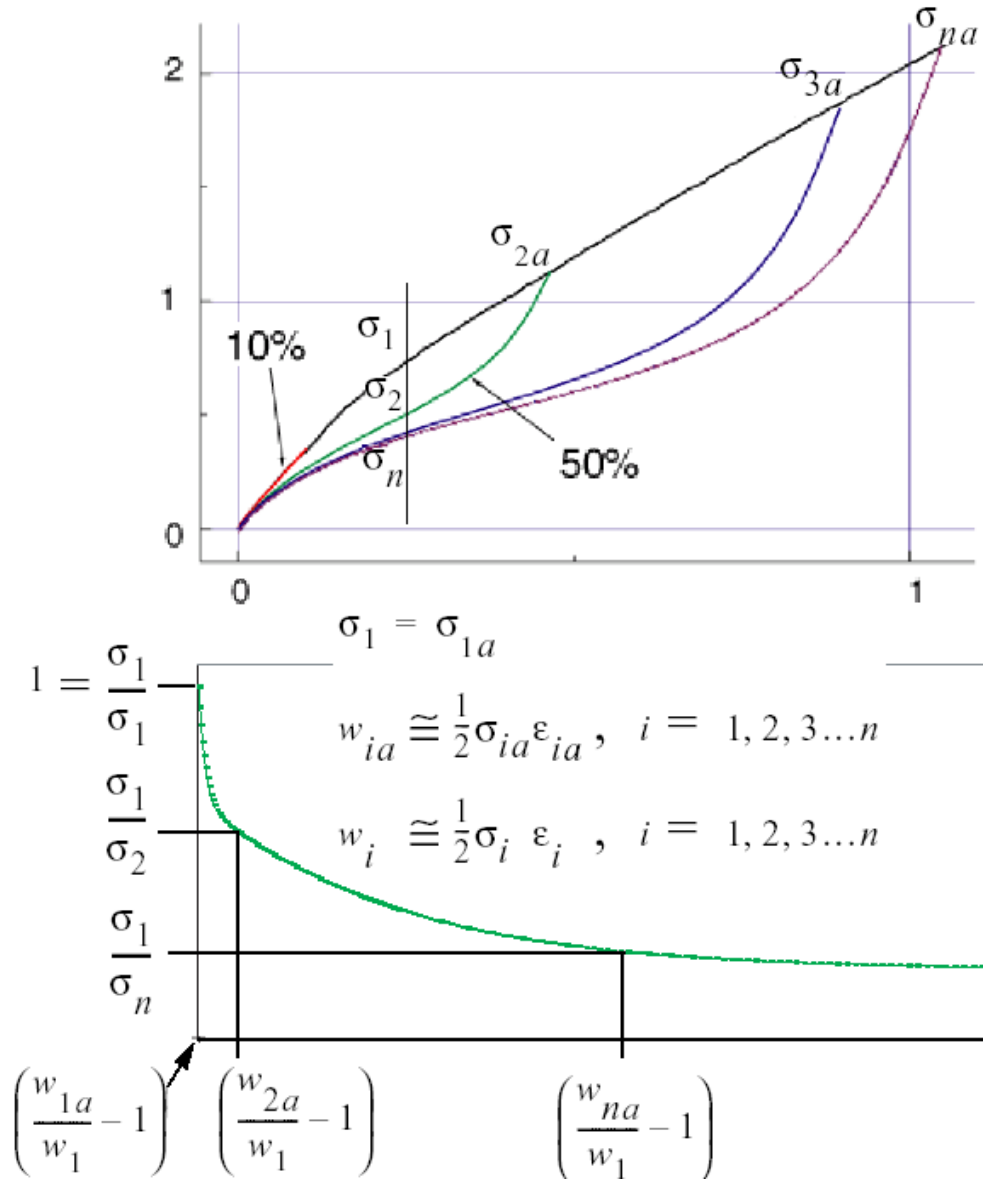
soğurup kendi içinde ısıya dönüştürdüğü enerjiden etkilendiğinden, malzeme modeline uygun bir thermoreolojik cevap özelliği kazandırmak için kullanılır.



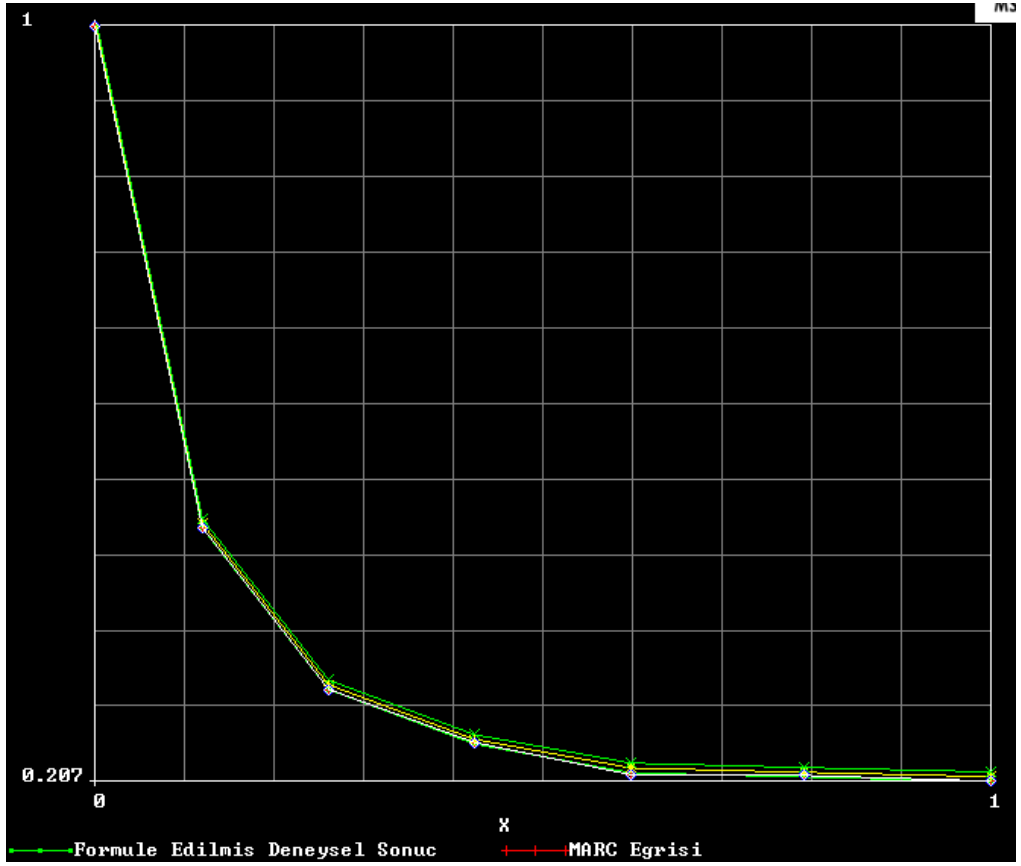
Şekil 11.1 Süreksiz Hasar Davranışı (Kırmızı MARC'ın bu özelliği devre dışıyken , siyah da devredeyken alınan çözümleme sonuçları)



Şekil 11.2 Şekil 11.3 (a)'daki formülasyona girmek üzere eş artımlı gerinime ait deneysel sonuçlar (Şekil 11.1'de yeralan ideal çözümleme sonuçlarındaki yükleme eğrilerinin eşartımlı ardışık genlikler için çakışık olma durumu ve bu şekilde egörldüğü üzere, gerçekte, bir genlikteki histerisisten diğerine geçerken harcanan zamanda kauçuğun relakse olması kaynaklı, kaçınılmaz gerilim cevabı kayıplarının artan genliklerdeki ardışık çevrimlerinin yükleme eğrilerini de birbirinden ayırık kılması)



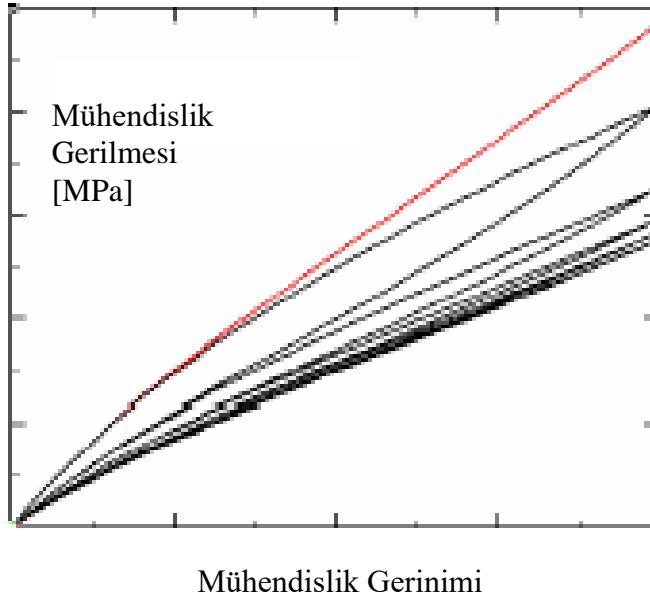
Şekil 11.3. (a) İlgili formülasyonun grafik gösterim destekli ifadesi



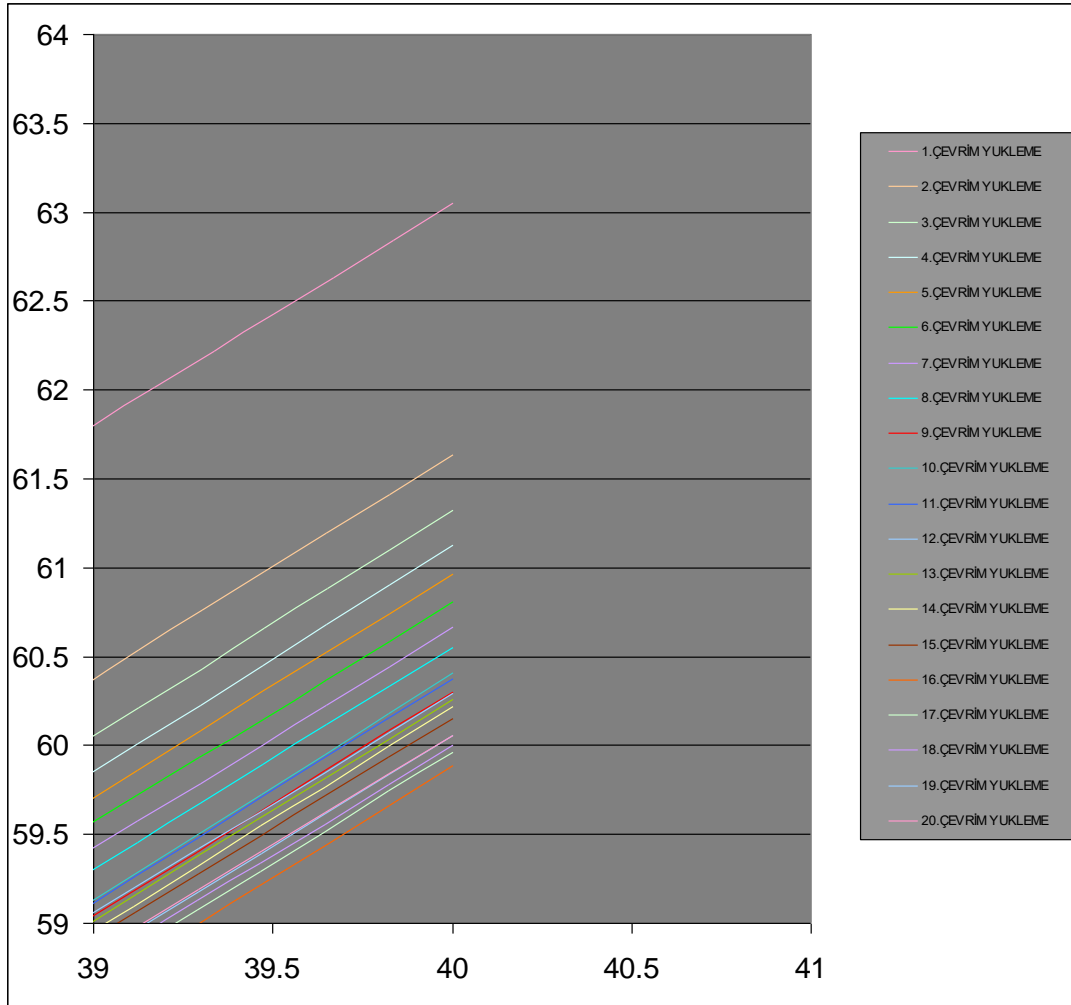
Şekil 11.3.(b) İlgili Formülasyon doğrultusunda oluşturulmuş eğri ve buan karşılaştırılan MARC eğrisi

12 Seçilen Malzemeye Süreğen Hasar Özelliğinin Kazandırılması

Sabit gerininin tekrarlanan çevrimlerinde, çevrim başına okunan en yüksek gerilme değerinin git gide düşüş göstermesi anlamına gelen bu süreğen hasar özelliği malzeme modeline, ömür testleini simule etmek amacıyla, şekil 12.1 ve 12.2’de açıklandığı gibi kazandırılır.

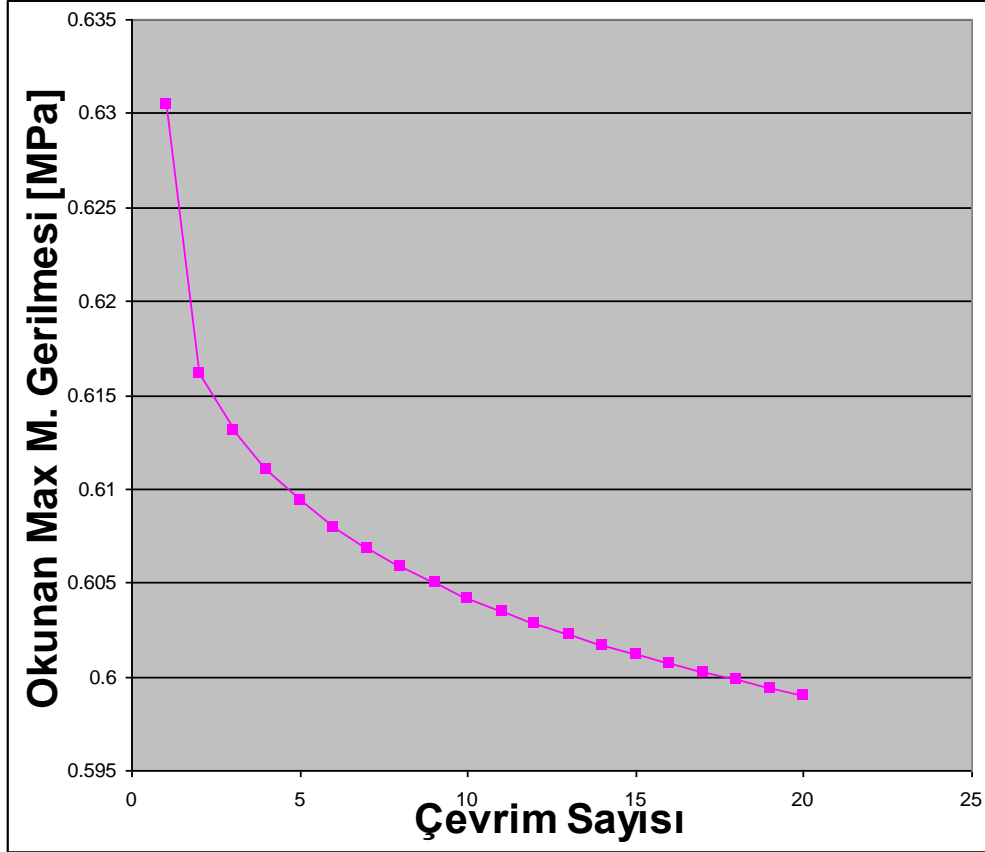


Şekil 12.1 İlk 20 çevrime ait yükleme eğrileri. Kırmızı MARC'ın bu özelliği devre dışıyken, siyah da devredeykenki çözümleme sonuçları



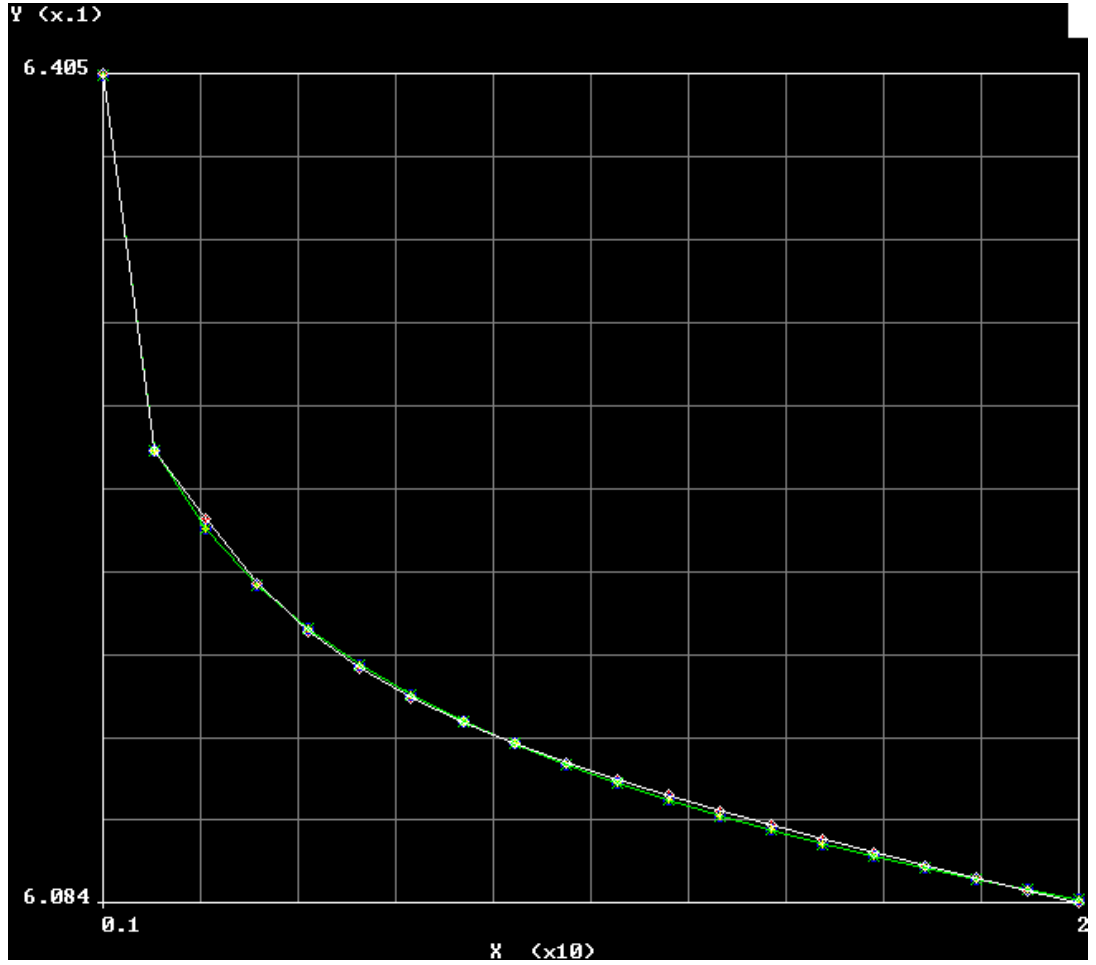
Şekil 12.3 Mühendislik Gerinimi / Mühendislik Gerilmesi_20 çevrime ait deneysel sonuçların yükleme eğrileri-detay görünüm

20 çevrime ait deneysel sonuçların yükleme eğrilerinde formülasyon için gereken maksimum değerlerin çevrim sayısına bağlı değişimini şimdiden gözlemleyebilmek adına büyütülmüştür. Bu maksimum değerlerin çevrim sayısına bağlı grafiği, MARC programına bu özelliği kazandırmak için girilecek grafik olup aşağıdaki şekilde yer aldığı gibidir.



Şekil 12.4Çevrim Sayısı-Max Gerilme Değeri Eğrisi grafiği

MARC'ın bu grafiğe hangi yakınsaklıkla bir eğri çakıştırabildiği kıyaslamalı olarak aşağıdaki şekilde verilmiştir.



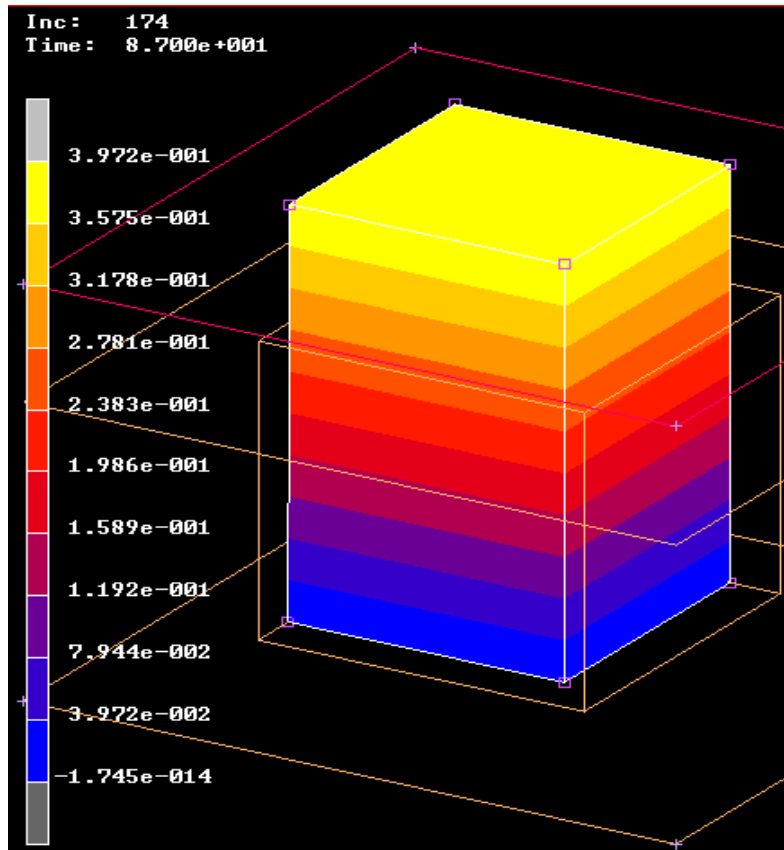
Şekil 12.5a Şekil 12.4'deki grafiğe MARC'ın çıkarttığı eğri.

Bir sonraki kısım geçmeden önce, malzemeye dair değinilen bu süreğen hasar (continious damage) [1] ve süreksiz hasar (discontinious damage) [1] verilerinin her ikisinin de MARC'a aynı malzeme modeli için de girilmesi konusunda bir uyarı yapmakta fayda görülmektedir. Bu özelliklerin her biri için MARC, 5 farklı katsayı atamakta ve bu katsayılar yardımıyla bir yukarıdaki resimde çıkarttığı eğrinin matematiksel ifadesine katmaktadır. Bu katsayılardan ilk 4'ü süreğen ve süreksiz hasar verisi için birbirlerinden bağımsız olup, son 5. ise her iki özellik için ortak olmak zorundadır ve her iki özellik aynı malzeme modeli için, ikisi de aynı anda geçerli olmak üzere MARC'a girildiğinde bu skaler faktör (scalar faktor) diye anılan bu 5. katsayı iki özellik için türetilen iki farklı denklemi birbirine bağlı (coupled) kılar. Mamefih buradaki çelişki, tek tek girildiğinde birbirinden oldukça farklı değerler olarak atanan bu skaler faktörler (tek başına süreksiz hasar için 0.205 ve tek başına süreğen hasar için 0.9) her iki hasar verisinin aynı anda girilmesiyle iki denklemi bağlı hale getiren bu 5. katsayının atanması, tamamen hasar verilerinin giriş sırasına bağlı olup, sonra girilenin tek başına girildiğizamanki bağımsız

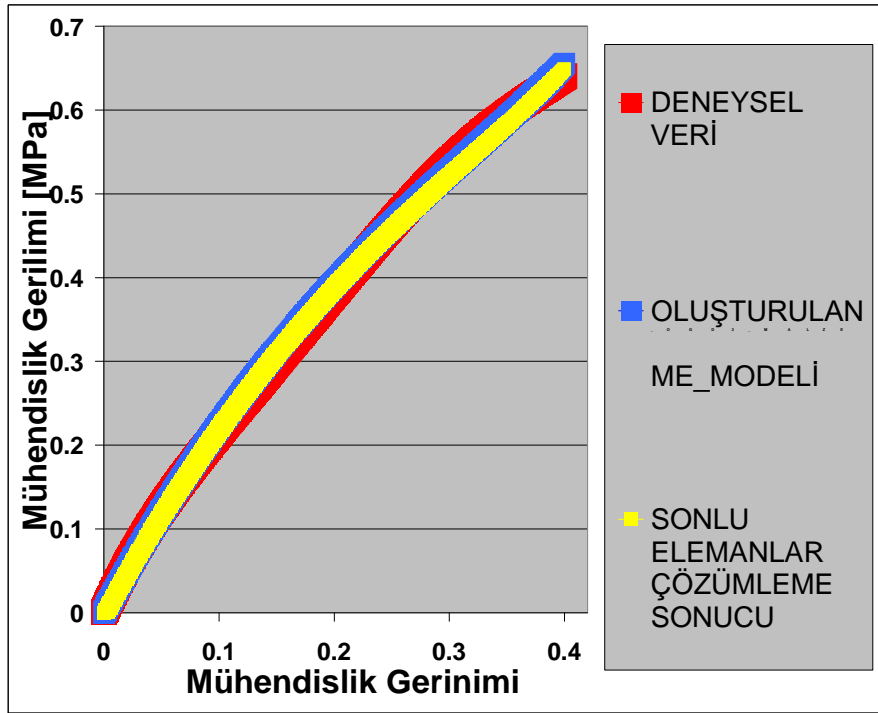
13.1. Üç Gerilme Durumunun Tek Elemanlı Modellerle Temsili -ve Test ile Çözümleme Sonuçlarının Kıyası

13.1.1 Tek Elemanlı Tek Eksenli Çekme

Bu analizin modellenmesinde ayrıtları 1x1x1mm olan bir küp oluşturulup, nodların dizilimi, meş boyutu ve meşlerin birbiriyle olan ilişkisinden bağımsız kılmak amacıyla, 8 nodlu Hermann yapısındaki tek bir elaman oluşturulmuş ve kübün zorlanma önesi ve sonrasındaki kesit alanlarındaki fark gözardı edilerek, genlik en yüksek değerindeyken okunan kuvvet, halen $1 \times 1 = 1 \text{ mm}^2$ kaldığı kesit alanına bölünerek, doğrudan test cihazının yük hücresinden okunup deney sonucu olarak elde edilen mühendislik gerilmesiyle kıyaslanmıştır. Küp üst ve alt yüzeylerinden %40'lık bir gerinime çekilmiş ve bu yer değiştirme, gerçekleştirilen deneyde olduğu gibi 10mm/dk hızla simule ettirilmiştir, dolayısıyla gerinim zamanı eşit kılındığı için gerçek denekten alınarak elde edilen relaksasyon özelliği de, uzun süreli bir test olmamasına karşın, bu durumdada ödün vermeksizin temsil edilmiş olur.



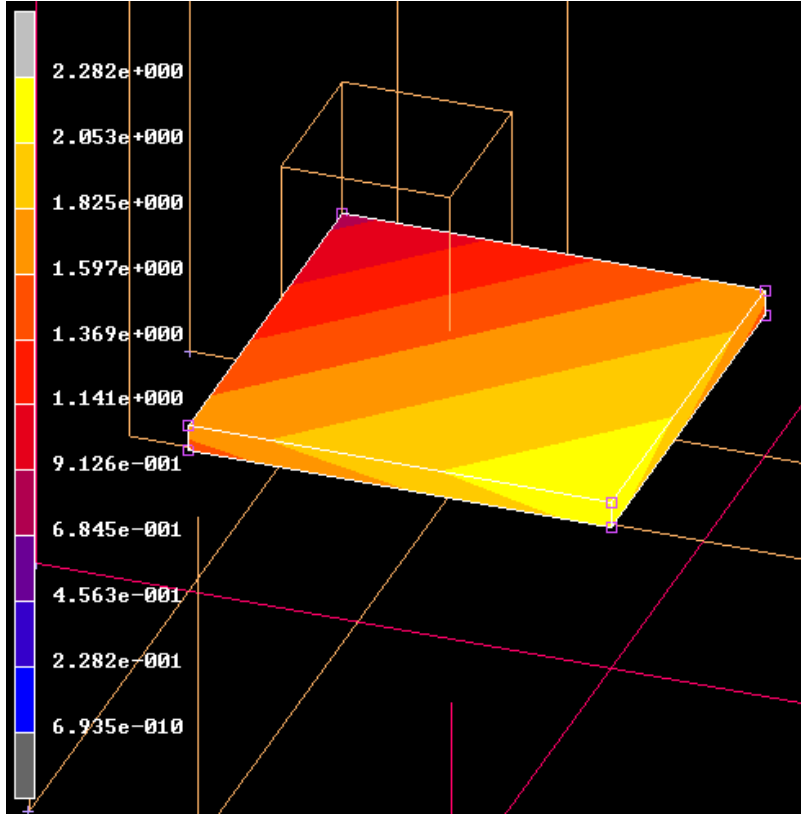
Şekil 13.1 Tek elemanlı tek eksenli çekme analiz sonucu ,model üzerinde gösterim



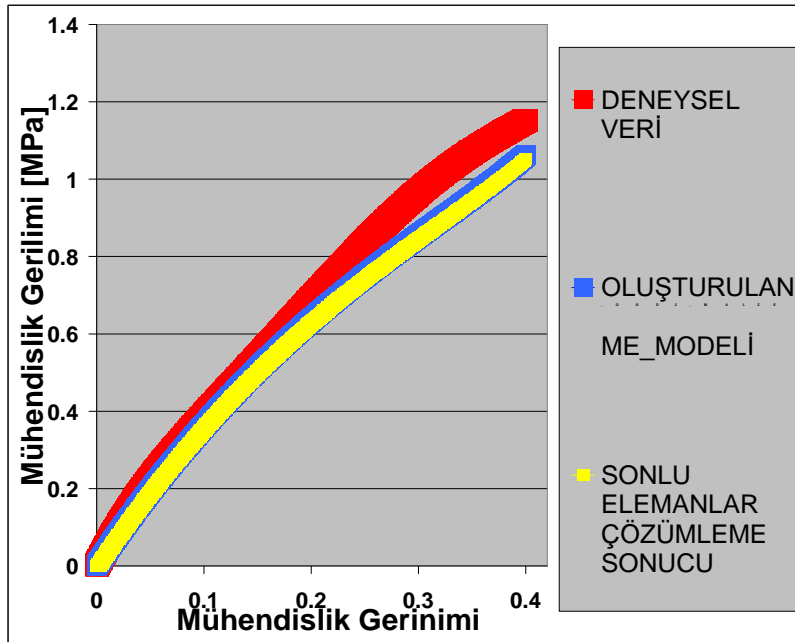
Şekil 13.2 Tek elemanlı tek eksenli çekme analiz sonucu, grafik gösterim

13.1.2 Tek Elemanlı İki Eksenli Çekme

İki eksenli çekme durumunu temsilen , 1x1x1mm boyutlarındaki bir küp, birbirlerine komşu iki yanıl yüzeylerinden sürtünmesiz olarak sabitlenmiş, yine Hermann elemanı oluşturulmuş ve sabitlenme dışı kalan iki yanıl yüzeyinden eş genlikteki yerdeğıştirmelere maruz bırakılmıştır. EN yüksek genliğe tekabül eden kuvvet cevabı, her bir rijit plakada F ise , her iki eksenle karşılıklı olarak F'er Newtonluk kuvvet, yani yük hücresinde (bkz deney düzeneğı) toplam 4F'lik kuvvet okunacaktır. Grafikte yeralan deneysel sonuçla kıyaslama öncesi, MARC'ta plaka başına okunan kuvvet dörtle çarpılmıştır; ancak gerilmenin eldesi için kuvvetin uygulandığı yine toplam 4 yüzey olduğundan değışen bir şey olmamaktadır.



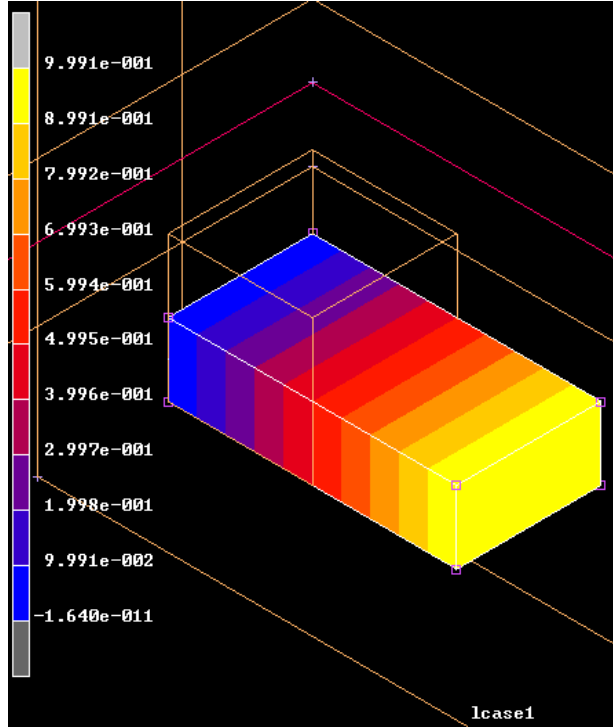
Şekil 13.3 Tek elemanlı iki eksenli çekme analiz sonucu, model üzerinde gösterim



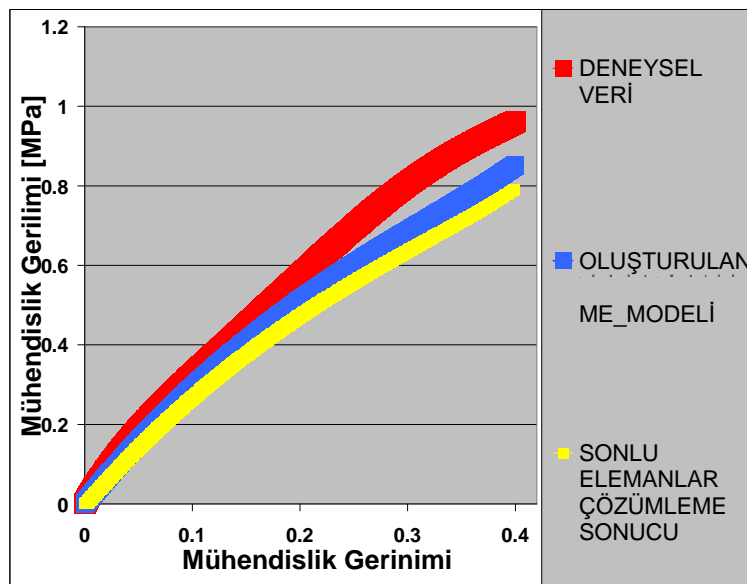
Şekil 13.4 Tek elemanlı iki eksenli çekme analiz sonucu, grafik gösterim

13.1.3 Tek Elemanlı Düzlem Kayması

Düzlem kayması gerilmelerini temsilen, cdenek boyutlarından ötürü, cismin ihmal edilecek kadar az biçim değıştiren asal eksen aşağıda görüldüğü üzere sürtünmesiz sabitlendiği karşılıklı iki yüzeyin sağladığı kısıtlamayla simule ettirilmiş, çözümleme sonucu gerdirme uygulayan rijit plakadaki kuvvet deney sonucuyla kıyaslamalı olarak verilmiştir.



Şekil 13.5 Tek elemanlı düzlem kayma analiz sonucu, model üzerinde gösterim



Şekil 13.6 Tek elemanlı düzlem kayma analiz sonucu, grafik gösterim

14. Basma ve Çekme Gerilmelerindeki Farklılığın Tahkiki ve Sürtünmesiz Disk Basma Testi

Mukavemetteki Bauschinger etkisine kısmen benzer bir biçimde (bir cismin eşgenlikli yük ya da yer değiştirme zorlanmalarına, basma ve çekme tahriklerine farklı cevaplar vermesi) kauçukta az da olsa farkedilmektedir, ancak kimi bakış açısına göre zaten az olan bu farklılığın bir miktarının da kauçuğun viskoelastik yapısı gereği önce çekildiğinde bir miktar iş pekleşmesine uğraması (work hardening) ve bunu takip eden basmada, çekmedekine özdeş mekanik cevabı verememesi, ya da önce basılması ve yine aynı iş pekleşmesi sebebiyle, takip eden çekmede aynı cevabı verememesi olarak da yorumlanmaktadır. Her halukarda, şimdiye kadar, laboratuvar plaka testi deneklerinin ince et kalınlıklarından ötürü, sadece çekme testleri sonucunda elde edilmiş deney verileri üzerine kurulmuş bir malzeme modelinin, sadece basmada ve yüzey sürtünmelerinden muhaf tek eksenli bir basma zorlanmasında deneysel sonuçlarını nasıl temsil edeceğinin tahkiki için aşağıda yer alan sürtünmesiz kauçuk disk basma testini tanıtmakta fayda vardır.

14.1 Sürtünmesiz Disk Basma Testi

Aşağıdaki şekilde fotoğraflı verilen test düzeneğinde, sürtünme katsayısının çok düşük olmasıyla bilinen iki teflon plakara ait, hem ağırlı teşkil etmeyecek hem de yük altında deforme olmayacak optimum kalınlıkta imal edilmiş, kauçuğa temas edecek yüzeylerin yüzey kalitesi ek sürtünmelere mahal vermeyecek düzeyde ve ilaveten kaydırıcı ince bir yağ kullanılmıştır. Her iki kare kesitli plakanın kauçuğa temas edecek yüzeylerinin en ve boyca merkezine, başı dışarıda 1.5 mm kalacak şekilde iğne çakılmış ve iki plaka arasına sıkıştırılan diskin sürtünmesi en aza indirilmiş ve kayganlaştırıcı yağ mevcudiyetindeki ortamda, basma zorlanması altında kaymaması sağlanmıştır.



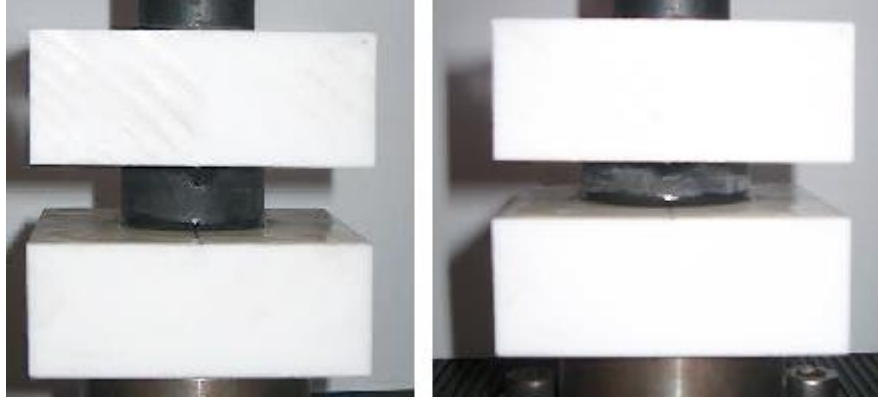
Şekil 14.1 Sürtünmesiz disk basma deney düzeneği, ortasına iğne çakılmış alt ve üst teflon plakalar

Bilindiği gibi basılan diske temas yüzeylerince ne denli sürtünme kuvveti uygulandığı, gerinim esnasında diskin silindirik yüzeyinin ne denle silindir eksenine paralel kaldığı ya da fıçılasmaya uğradığıyla tahkik edilebilir, bunu açıklamak için aşağıdaki resimden faydalanılabilir.



Şekil 14.2 Hasas yüzey kalitesiyle işlendiği yüzeyinin parlaklığından da belli olan alt ve üst basma plakaları, sol üstte sürtünmesiz sıkıştırılmış ve sol altta basma yüzeylerinde sürtünmeye maruz kalarak sıkıştırılmış kauçuk disk. [1]

Bu bağlamda bizim gerçekleştirdiğimiz testte te eşadımlı artan ardışık gerinimlerle basılan diskin, sıfır yük ve yer değiştirme konumuyla, çalışılmış max gerinimdeki testin en yüksek basma yer değiştirmesindeki konumu aşağıdaki şekilde yan yana kıyaslamalı olarak verilmiştir, en yüksek basma yerdeğiştirmesi halinde dahi yanal yüzeylerin konumu yukarıdaki şekilde sürtünmesiz sıkıştırılmış diskinkine yakındır ki bu durumda MARC'ta yapılacak çözümlemede sürtünme katsayısının oldukça küçük bir değer olarak girilmesi rahatlıkla karara bağlanabilir.

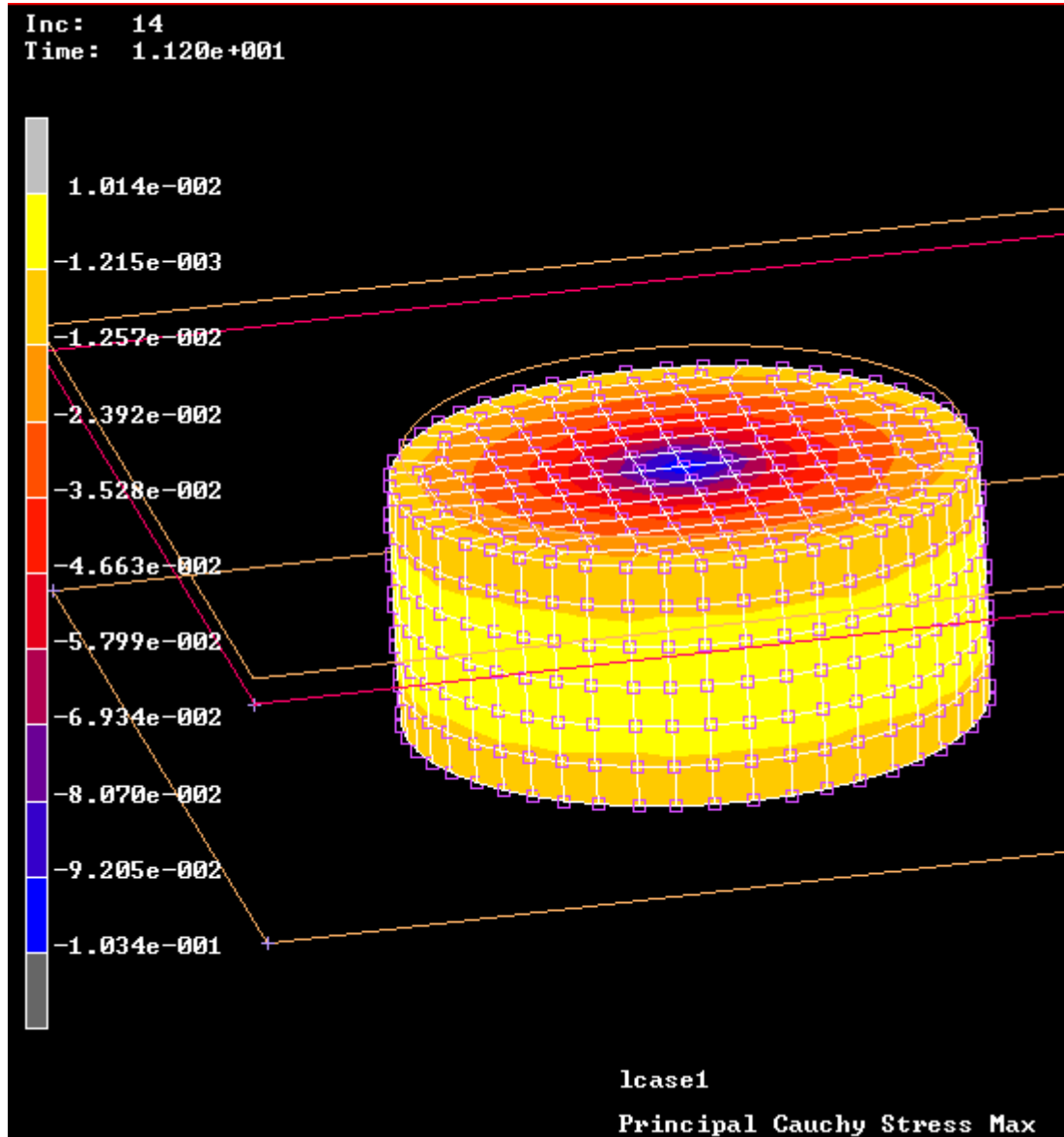


Şekil 14.3 Serbest ve max gerinim konumlarındaki kauçuk disk, en aza indirilmiş sürtünmelerin sonucu baskı altındaki diskin yanıl duvarlarındaki korunmuş silindiriklik.

14.1.1 Sürtünmesiz Disk Basma Testi Marc Analizi

Plaka testlerinin üç temel gerilme durumu için yalnızca çekme testleriyle elde edilmiş deneysel sonuçların MARC'a aktarılmasıyla oluşturulmuş malzeme modelinin, ilk kez bir basma simulasyon sonucuyula sınıanacağı tek eksenli sürtünmesiz disk basma testi %10, %20, %30, %40'lık basma gerinimleri için (%40'tan sonraki gerinimlerde yanıl silindirik yüzeyde fıçılanma gözlemlendiği için gerinimdeki artış %40'da bırakılmıştır.) aşağıdaki gibi modellenip analiz edilmiş ve sonuçları her gerinim oranı için ayrı ayrı yorumlanmıştır.

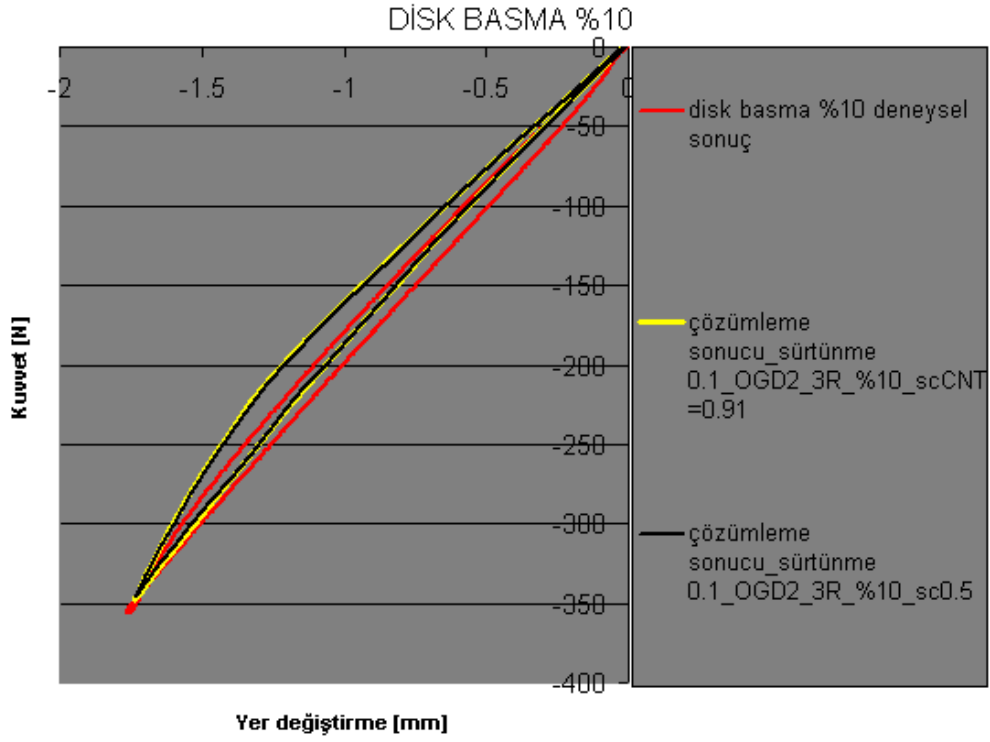
Bu arada 12. bölümün sonunda değinilen ve süreğen ve süreksiz hasar verilerinin aynı malzeme modeline birarada tanıtılmasında karşımıza çıkan 5. ve ortak katsayı skaler faktörün atanmasındaki tesadüfılık ve bunun hasar verisinin malzeme modeline tanıtılış sırasına bağılı oluşu karşısında , tek başına süreğen hasar verisi girildiğinde atanan skaler faktör, , tek başına süreksiz hasar hasar verisi girildiğinde atanan skaler faktör, ve ikisinin aritmetik ortalamasının ayrı ayrı girilmesi sonucunda çözümleme sonucunun deneysel verilerle ne ölçüde çakıştığının incelenmesi de bu disk basma testleri sonuçları kısmında ele alınacaktır.



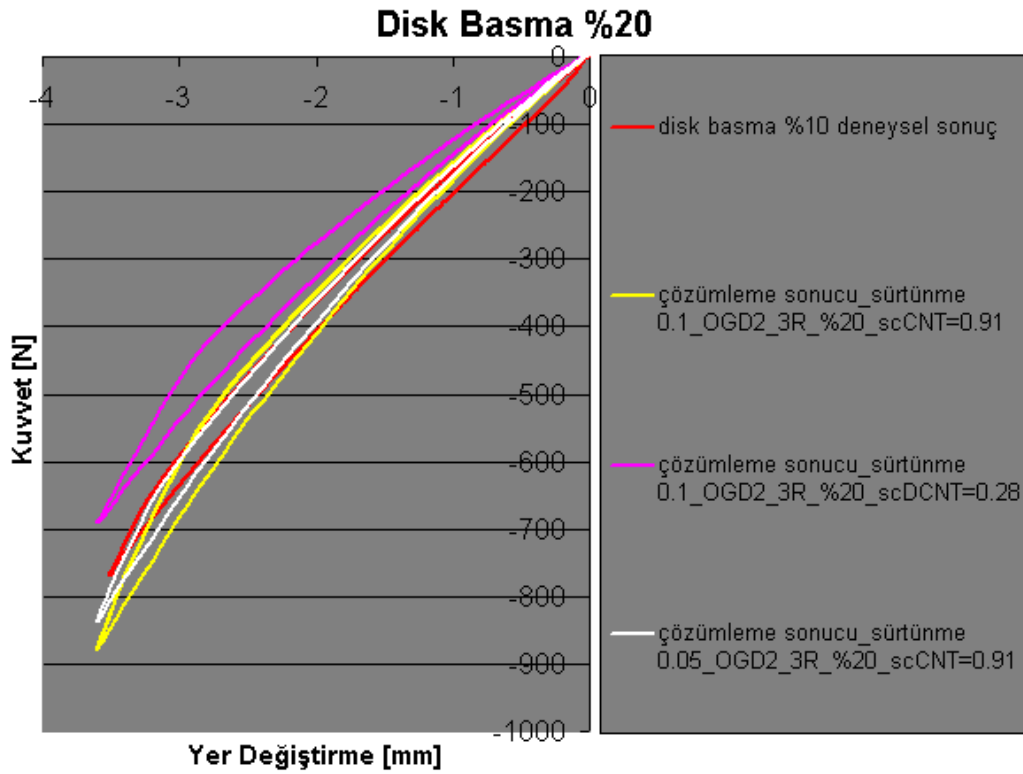
Şekil 14.4 Diskin modellenmesi ve analiz şartlarının girilmesi

Analiz sonuçları her gerinim için aşağıda ayrı ayrı raporlanmıştır, en kapsamlı malzeme modeliyle, sürtünme katsayısının kombinasyonlarının en kapsamlı değerlendirilmesi %30'luk gerinim için gerçekleştirilmiş ve bu doğrultuda alınan ehven sonuçlara ait belli başlı malzeme kombinasyonları diğer gerinim oranları için de sorgulanmıştır. Grafiklerin eğri tanım bölümlerinde yeralan ifadelerden scCNT (scalar factor CONTINIUOS DAMAGE) süreğen hasar verisinin tek başına girildiği durumda atanan skaler faktör, scDSCNT (scalar factor DISCONTINIUOS DAMAGE) süreksiz hasar verisinin tek başına girildiği durumda atanan skaler

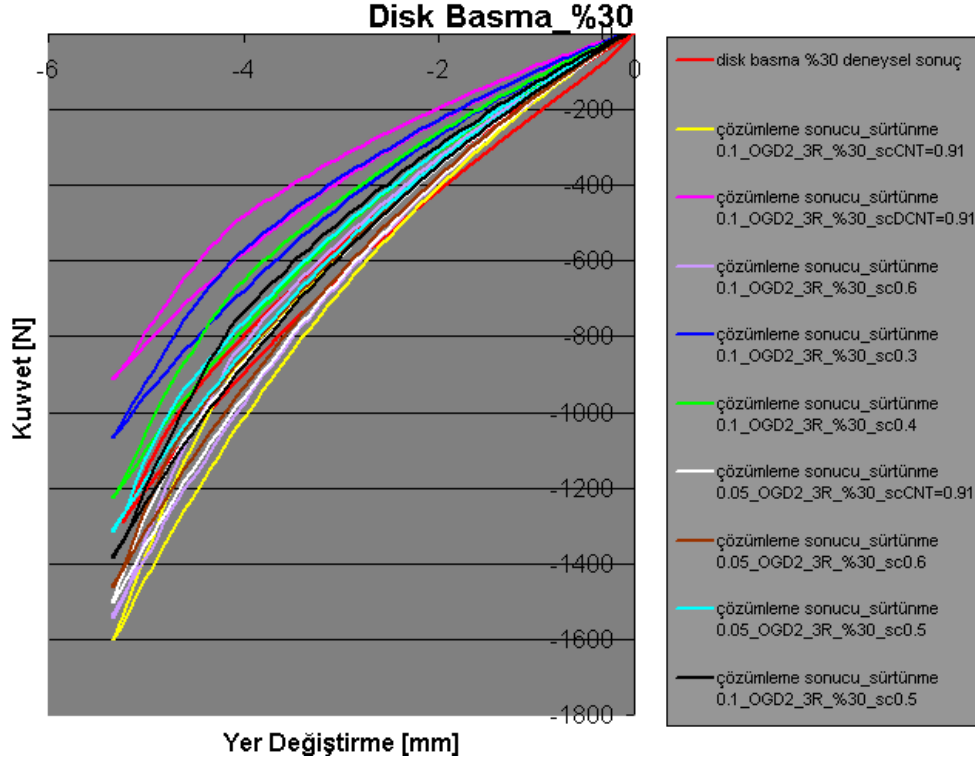
faktör , scORT da ikisinin aritmetik ortalaması anlamına gelmektedir.Bu bilgiler ışığında aşağıdaki dört grafiği değerlendirmek gerekirse



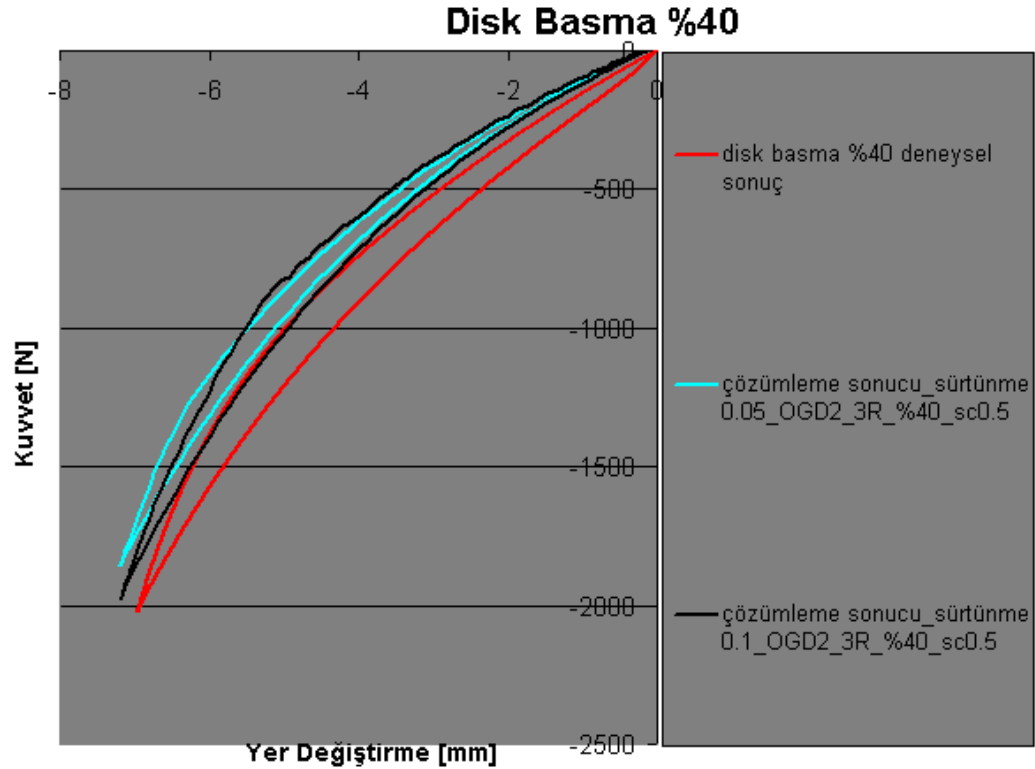
Şekil 14.5 %10 gerinimdeki sürtünmesiz disk basma testi, MARC analizi ve deneysel sonuç



Şekil 14.6 %20 gerinimdeki sürtünmesiz disk basma testi, MARC analizi ve deneysel sonuç



Şekil 14.7 %30 gerinimdeki sürtünmesiz disk basma testi, MARC analizi ve deneysel sonuç



Şekil 14.8 %40 gerinimdeki sürtünmesiz disk basma testi, MARC analizi ve deneysel sonuç

Bu değerlendirmeler doğrultusunda, süreğen ve süreksiz verilerin malzeme modeline birarada tanıtıldığı durum için, her dört gerinim oranında da en ehven

çakışmayı sağlayan ‘sürtünme 0.1_OGD2_3R_%--_sc0.5’ kodlu ve ortalama skaler faktör olan 0.5 değerinin dışarıdan harici girildiği malzeme modeli nihayi model olarak atanmıştır. Ayrıca tek elemanlı kübik modellerin üç temel gerilme durumu için iyi bir çakışma performansı sergileyen aynı OGD2’nin (n=2 olarak $\alpha_{1,2}$ ve $\beta_{1,2}$ ‘li Ogden malzeme modeli), sadece çekme testi sonuçlarında elde edilmiş veriler üzerine yapılandırılmış bir model olmasına karşın tek eksenli sürtünmesiz disk basma deneyinin sonuçlarıylada oldukça iyi bir çakışma sağladığı gözlemlenmiştir.

15. Ogden Malzeme Modeli, Hacimde Bir Miktar Sıkıştırılabilirlik ve Yığılma Modülü

Seçilen malzeme modeli Ogden olduğunda, hesaba katılması gereken bir etmen de, hacmin bir parça sıkıştırılabilir olduğu kabulüdür. Daha önce verilen geleneksel Ogden eşitliğinin, biraz modifiye edilmiş hali olan ve MARC’ın kullanıma soktuğu biçimiyle [1] Ogden ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$W = \sum_{n=1}^N \frac{\mu_n}{\alpha_n} \left[J^{\frac{-\alpha_n}{3}} (\lambda_1^{\alpha_n} + \lambda_2^{\alpha_n} + \lambda_3^{\alpha_n}) - 3 \right] + 4.5K \left(J^{\frac{1}{3}} - 1 \right)^2 \quad (15.1)$$

ve buradaki yığılma modülü aynı kullanım kılavuzundan alıntı yapılacak olunursa [1]

$$K = \frac{p}{\Delta V/V_0} \quad (15.2)$$

biçimindedir.

Daha önce malzeme modeline karar vermek üzere değerlendirmeye alındığından bahsedilen 160 aday modelden (bkz EK A) Ogden 2’lere bakılırsa, ilgili ‘print-screen’ görüntülerde yığılma modülünün (bulk modulus) MARC tarafından belirli bir formüle göre otomatik atandığı görülmektedir. MARC bunu, dışarıdan harici bir biçimde yığılma modülü girilmediği durumlarda, yukarıda da verilen Ogden formülünün matematiği gereği işletilebilmesi için kendisi atamaktadır, ki otomatik atanan bu değer, EK A’da artan gerinim için takip edildiğinde, gerinimden gerinime bir hayli farklılık gösterdiği görülecektir ki yığılma modülü gerinimden gerinime bu denli değişmemelidir. Bunun kontrol altına alınıp, kimi matematiksel gerekliliklerden otomatik olarak atanmak durumunda kalmamış,

diziksel anlamını temsil eden yığılma modülünün harici olarak yukarıdaki K'yı veren formüle göre hesaplanıp MARC'a, kendi atadığı değerin 'üzerine yaz' yaparak girilmesi gerekmektedir, aksi halde yukarıda bir lkez daha verilen Ogden Gerinim Enerjisi eşitliği gereği, türevi alınarak elde edilecek gerilmenin, asıl olması gerekenden bambaşka değerler alma riski mevcuttur. Bu yüzden yığılma modülünü, düzenek ve yöntemi aşağıda tanıtılmış test yardımıyla, fiziksel anlamını temsil ettiği biçimiyle tespit edeceğiz.

15.1 Yığılma Modülü Testi

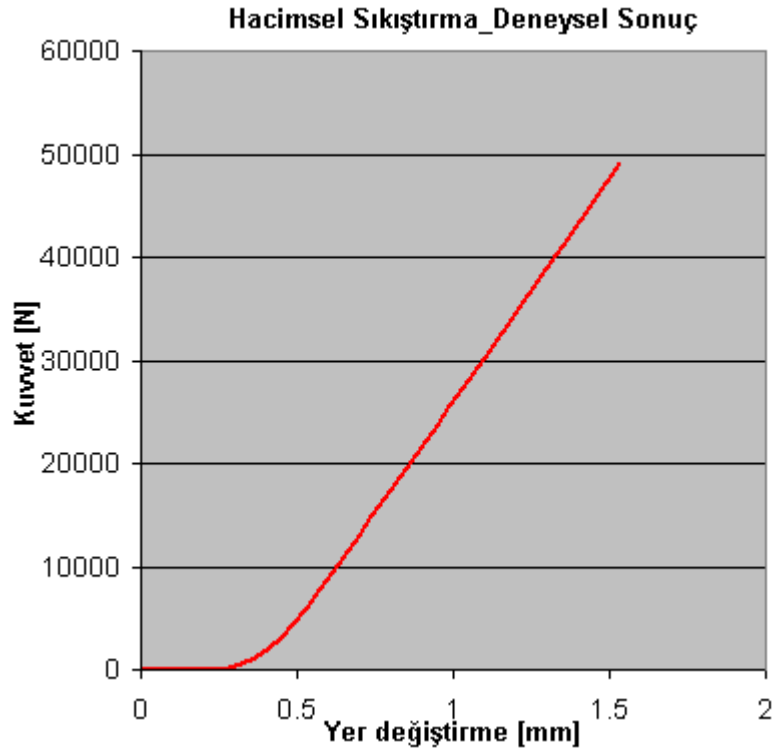
Aşağıdaki şekilde görüldüğü üzere,



Şekil 15.1 Yığılma Modülü tayini test düzeneği

kauçuk bir diski boşluksuz bir biçimde içine alan hayli kalın (kauçuğun çok az sıkıştırılabilirliğinden ötürü oldukça rijit olması gerekir, ki kauçuğa uygulanacak kuvvet iç duvarlarına yansıdığında ihmal edilebilcek kadar az şekil değiştirsün ve test cihazına ait pistonaki en ufak yer değiştirmelerin dahi kauçuğun kendi sıkışmasına ait olduğundan şüphe duyulmasın.) bir alt aparatla, kauçuğu içine alan iç yüzey gibi, basan tokmağın dış yüzeyinin de oldukça hassas bir yüzey kalitesiyle işlendiği üst

aparatin (ki kauçuk ile aparat iç duvarlarının sürtünmesi elde edilen kuvvete yansımaz) arasında hacimsel olarak sıkıştırılmaya 100mm/dk hızla zorlanan kauçuğun 50000N olan cihaz üst sınırına kadar sıkıştırılması sonucu cihaz ekranında okunan mm cinsindeki çökme değeri Δl , taban alanı sabit kalmaya zorlandığından $(\Delta l/l_0) = (\Delta V/V_0)$, doğrudan diskin (Ø36x18mm) başlangıç yüksekliği olan 18mm'ye bölünür ve bu oran, $\rho = F/A_0 = 50000/(\pi (18^2))$ 'ya bölündüğünde K bulunmuş olur. Bunun için ilgili testin kuvvet yol grafiğini inceleyecek olursak



Şekil 15.2 Hacimsel sıkıştırma-deneysel sonuç

Grafikteki ve test tanımındaki verilerin gerekli olanları yığılma modülü formülünde yerine konacak olursa. (Eğrinin başlangıcındaki düz çizgi, uygulanmaya başlanmış kuvvet karşısında kauçuğun aparatındaki boşluklarda ilerleyerek yerleşmeye devam ettiği bölge olduğu için, Δl değeri olarak, x ekseninde okunan en yüksek değer olan 1.5mm değil, kuvvetin yükselmeye başladığı x değeri 0.3'ün bu değerden farkı; yani $\Delta l = 1.5 - 0.3 = 1.2\text{mm}$ alınmıştır.)

$$K = \frac{\rho}{\left(\frac{\Delta V}{V_0}\right)} = \frac{\left(\frac{F_{maks}}{A_0}\right)}{\left(\frac{\Delta l A_0}{l A_0}\right)} = \frac{\left(\frac{F_{maks}}{A_0}\right)}{\left(\frac{\Delta l}{l}\right)} = \frac{F_{maks} l}{A_0 \Delta l} = 736,532 \text{Mpa} \quad (15.3)$$

16. Laboratuvar Denekleri Testleri

16. 1.Laboratuvar Denekleri Statik Testleri

16.1.1 Üç Gerilme Durumu, Gerçek Test Düzenine Özdeş Modelleme , Test ve Çözümleme Sonuçları

Basma zorlanması cevabının çekme deneyleri sonucu elde edilmiş veriler üzerine kurulu bir malzeme modeliyle temsil edilip edilemeyeceği sınamasını ve yığılma modülü deneylerini, üç temel gerilme durumunu gerçek deneklerin modellerinin analizinden önce yapılmasının neden gerekli görüldüğü şu şekilde açıklanabilir.

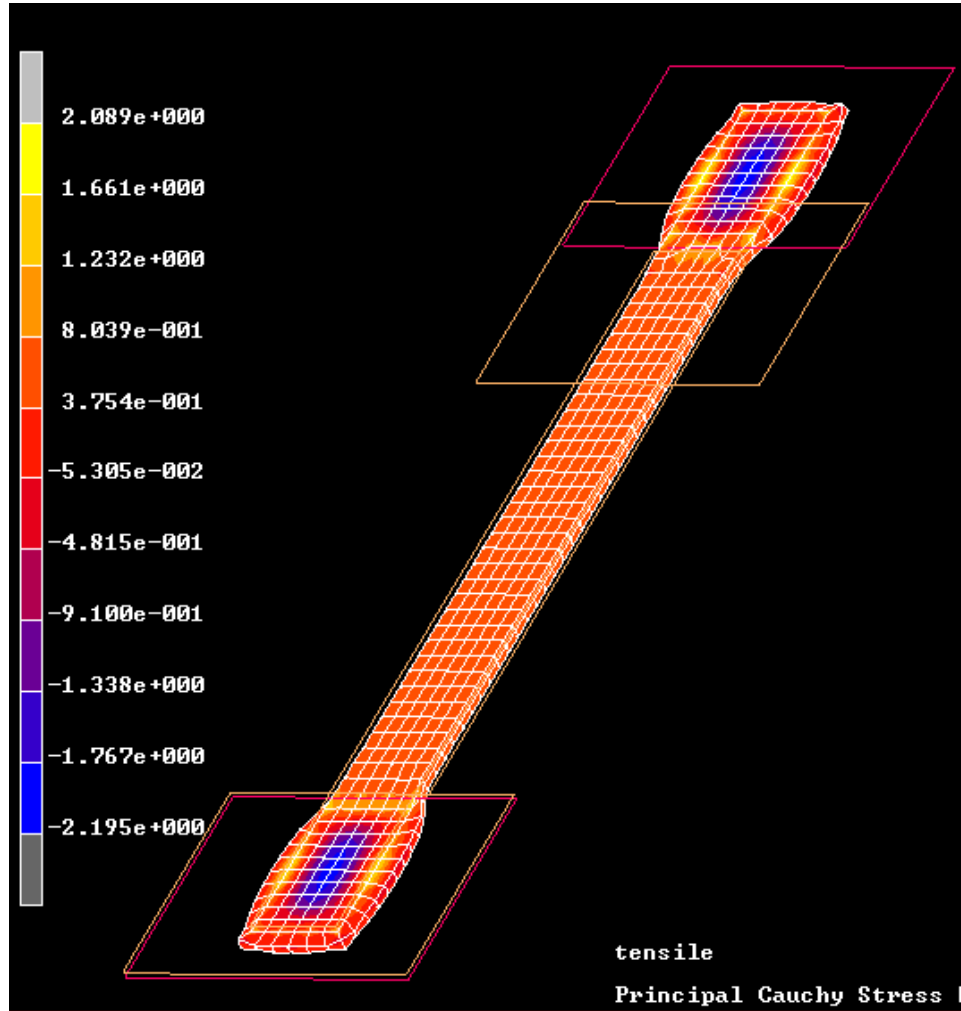
Aşağıdaki plaka testi deneklerini incelenecek olursa, 13. bölümde incelenmiş bulunan tek elamanlı temsili modellerinden farklı olarak, deney düzenine sıkıştırılarak tutturulmaktadır. Bu bağlamda örneğin tek eksenli çekme deneyi için kesilen papyon denekin ekstansiyometre bağlanacak kısımları, sıkılma öncesi pozüsyonlamanın ardından, kıskaçların sıkma işlemi sona erdiğinde kulak kısımlarında vuku bulan yastıklanmadan ötürü denneğin gövde kısma salmakta ve tekrar belli belirsiz ir artı kuvvet hissedilinceye değin sarkması pistonu hafifçe yukarı alarak giderilen denekte, sıfır kuvvete erişildiğinde kıskaçtan kısıpaca gövde kısmının uzunluğu bir denekte farklı öteki denekte farklı çıkmaması için, her papyon denekin kıskaçlar kapatılmadan önceki serbest konumunda yerleştirileceği referans pozüsyonu belli ve aynı olması gerektiği gibi, sıkılan kıskaçların sıkma işlemi sonrası aynı kısıpacin iki keneti arasındaki mesafe ölçülerek kontrol altında tutulmalı ve her denek aynı ölçüde yastıklandırılmalıdır.

Bu prensibe simulasyonda da dikkat edilmeli, sıfır konumda, henüz kıskaçlar sıkılmaya başlamadan önceki halde analiz başladığından kıskaçların birbirine ne kadar mesafe kala duracağı, bu esnada gerçekleşen yastıklanmanın ne kadar olacağı, papyonun gövde kısmında ne kadar bir salma yapacağı ve bu salmanın analizde

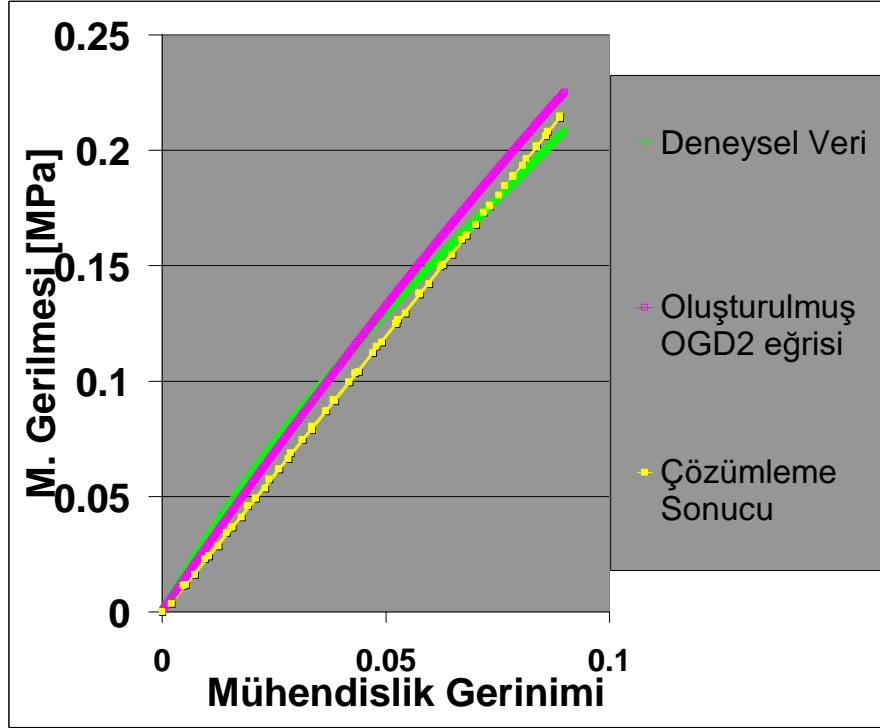
$F=0$ 'a geri getirildikten sonra nihai sıfır konumunda simulasyondaki denek gövdesi uzunluğunun gerçek denek gövdesinin aynı durumdaki uzunluğuyla ne kadar örtüştüğü konuları tatmin edici bir çakışmaya oturtulduktan sonra çekme işlemine geçilmelidir ki sayılan tüm bu unsurlar için, hem kauçuğun basma davranışının elde edilen malzeme modeliyle ne oranda temsil edilebildiğine, hem de kauçuğu kısmen sıkıştırılabilir kabul eden malzeme modelimizin kauçuğun sıkışmasına ne ölçüde izin verdiği gibi bilgilere gerek duyulmaktadır.

16.1.1.1 Gerçek Deney Modeli Tek Eksenli Çekme

Yine Hermann elemanı olarak, verilen boyutlardaki meşlemeyle %10'dan %40'a dek çekme bırakma zorlanmasına tabi tutulmuş ve sonuçlar bir alt şekilde Mühendislik Gerinimi / Mühendislik Gerilmesi grafik bazında kıyaslanmıştır

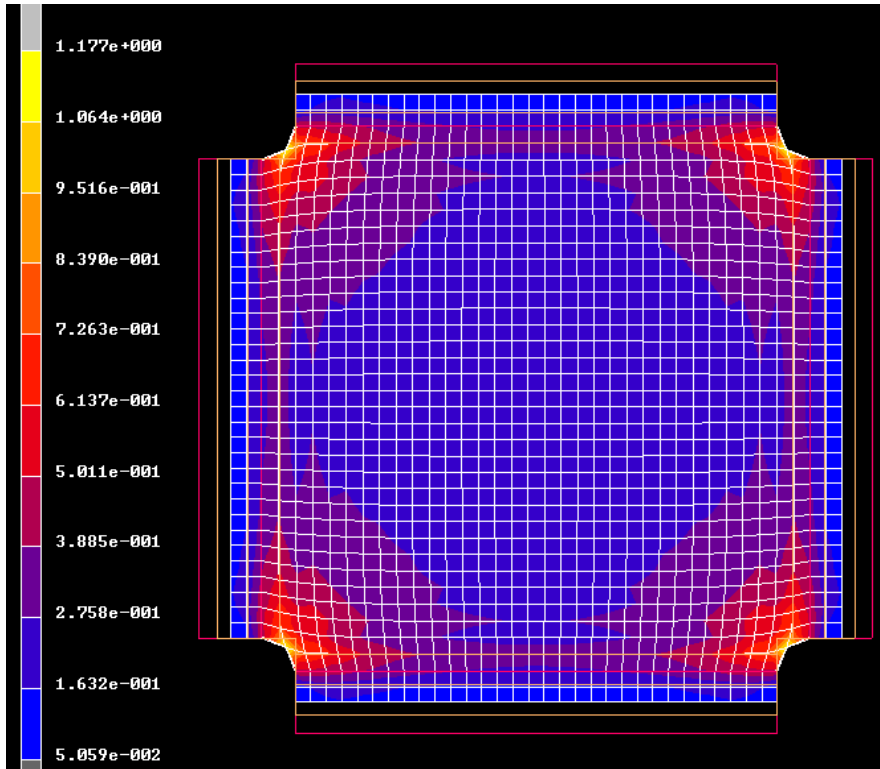


Şekil 16.1. Gerçek deney modeliyle tek eksenli çekme analiz sonucu, model üzerinde gösterim

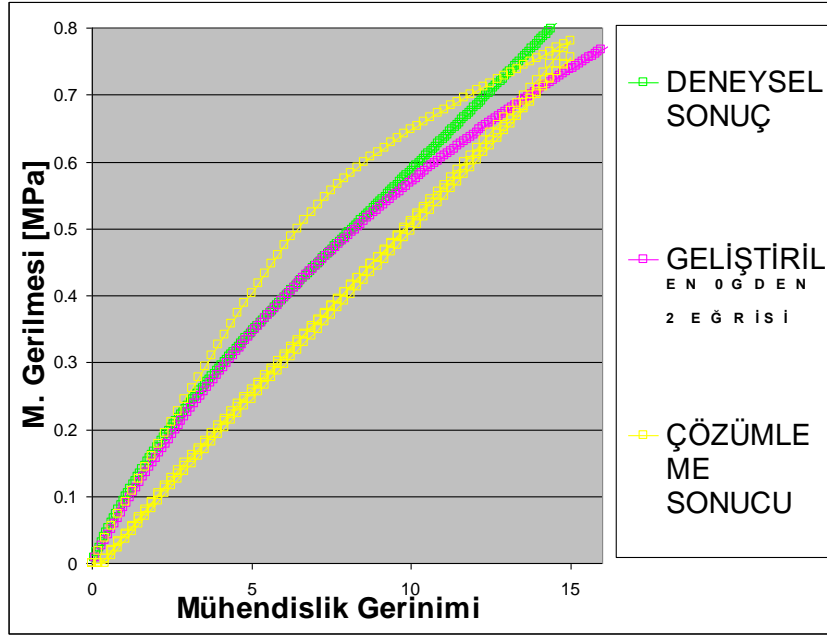


Şekil 16.2. Gerçek deney modeliyle tek eksenli çekme analiz sonucu, grafik gösterim

16.1.1.2 Gerçek Deney Modeli İki Eksenli Çekme

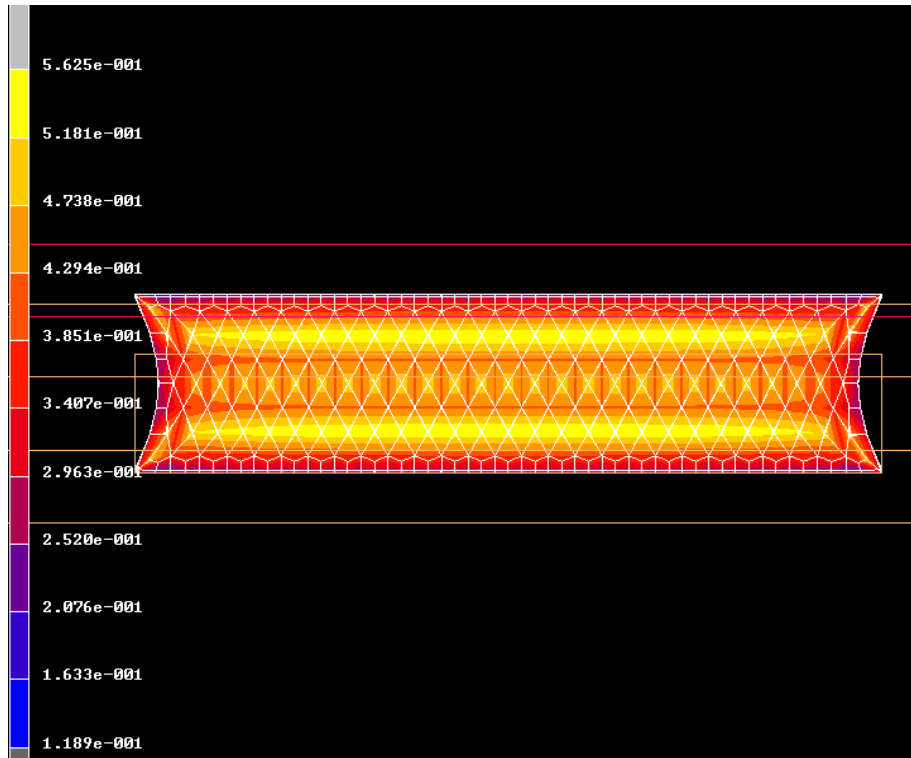


Şekil 16.3. Gerçek deney modeliyle iki eksenli çekme analiz sonucu, model üzerinde gösterim

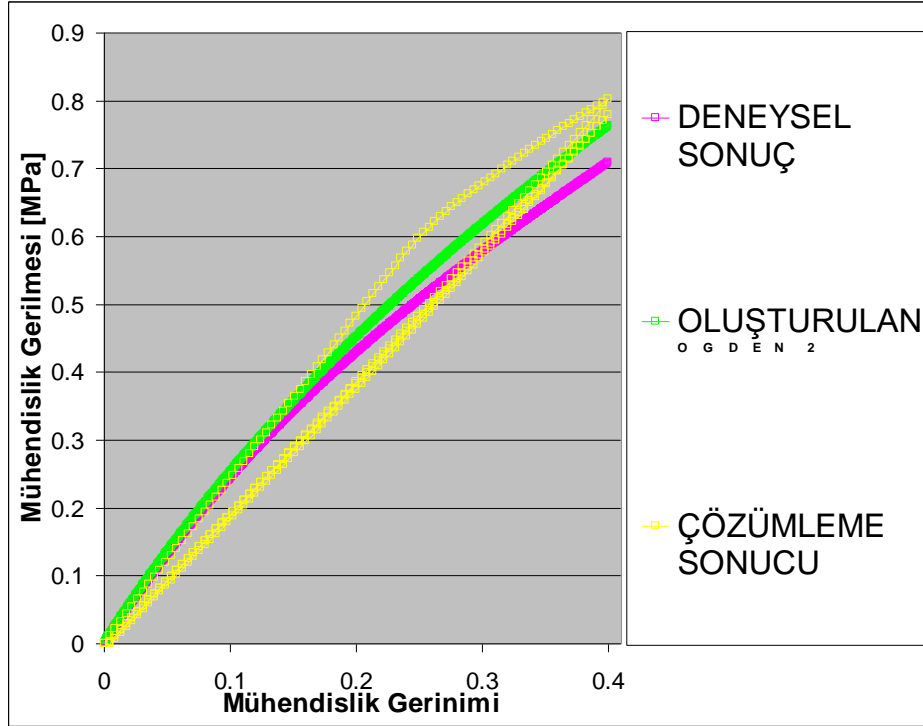


Şekil 16.4. Gerçek deney modeliyle iki eksenli çekme analiz sonucu, grafik gösteri

16.1.1.3 Gerçek Deney Modeli Düzlem Kayma



Şekil 16.5 Gerçek deney modeliyle düzlem kayma analiz sonucu, model üzerinde gösterim

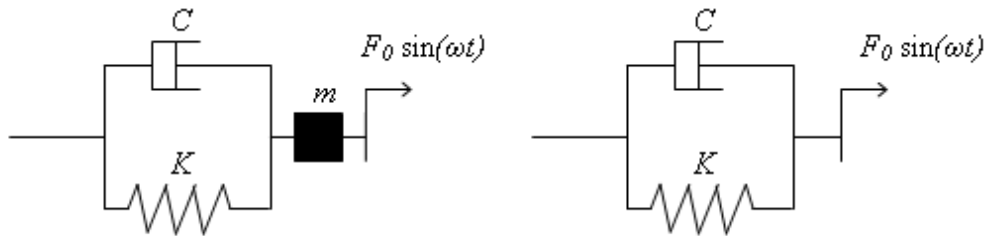


Şekil 16.6 Gerçek deney modeliyle düzlem kayma analiz sonucu, grafik gösterim

16.2. Dinamik Laboratuvar Denek Testleri ve Kuramsal Altyapısı

16.2.1 Dinamik Kuramsal Altyapı

Bu alanda daha fazla ilerlemeden önce temel dinamik kavramlarla, kauçuğun dinamik testlerinde kauçuk davranışını temsil etmek üzere kullanılan kimi terimler arasında ilişki kurmakta fayda vardır. Bu kavramlar arasında bir köprü kurmak adına öncelikle kauçuğun kütlesinin hesaba katıldığı ve ihmal edildiği iki durum için de Kelvin-Voigt temsili modelini zorlanmış titreşimlere haiz bir sistemde resmetmek gerekirse



Şekil 16.7 Kütlenin mevcut olduğu ve olmadığı zorlanmış titreşimli durum için kuçuğun Kelvin-Voigt modeliyle temsili

İlgili şekillere binayen hareket denklemleri, ve ilişkili ifadeler de sırasıyla

$$F_0 \sin(\omega t) = m \ddot{u}(t) + C \dot{u}(t) + K u(t) \quad (16.1)$$

$$F_0 \sin(\omega t) = C \dot{\mathbf{u}}(t) + K \mathbf{u}(t) \quad (16.2)$$

$$\mathbf{u}(t) = A \cos(\omega t) + B i \sin(\omega t) = u e^{i\omega t} \quad (16.3)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = -\omega A \sin(\omega t) + i\omega B \cos(\omega t) = i\omega u e^{i\omega t} \quad (16.4)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t) - i\omega^2 B \sin(\omega t) = -\omega^2 u e^{i\omega t} = -u \omega^2 e^{i\omega t} \quad (16.5)$$

$$F_0 \sin(\omega t) = -m u \omega^2 e^{i\omega t} + C i \omega u e^{i\omega t} + K u e^{i\omega t} \quad (16.6)$$

$$F_0 \sin(\omega t) = m \left(-\omega^2 A \cos(\omega t) - i\omega^2 B \sin(\omega t) \right) + C \left(-\omega A \sin(\omega t) + i\omega B \cos(\omega t) \right) + K \left(A \cos(\omega t) + B i \sin(\omega t) \right) \quad (16.7)$$

$$\omega t = 0$$

$$F_0 = A \left(-\omega^2 m + K \right) + C i \omega B \quad A = \frac{F_0}{\left(-\omega^2 m + K \right)} \quad B C = 0 \quad (16.8)$$

$$\omega t = \frac{\pi}{2}$$

$$F_0 \sin(\omega t) = m \left(-\omega^2 A \cos(\omega t) - i\omega^2 B \sin(\omega t) \right) + C \left(-\omega A \sin(\omega t) + i\omega B \cos(\omega t) \right) + K \left(A \cos(\omega t) + B i \sin(\omega t) \right) \quad (16.9)$$

$$F_0 = -m \left(i\omega^2 B \right) - C \left(\omega A \right) + K \left(B i \right) = -C \left(\omega A \right) + i B \left(K - m\omega^2 \right) \quad (16.10)$$

$$B = 0 \quad -C \left(\omega A \right) = F_0 \quad (16.11)$$

$$A \left(-\omega^2 m + K \right) = -C \left(\omega A \right) = F_0 \quad -\omega^2 m + K = -C\omega \quad (16.12)$$

Bir yukarıdaki ifadede $-\omega^2 m + K$ ve $-C\omega$ birbirlerinin yerine konulursa

$$F_0 = \left(-m\omega^2 + C\omega i + K \right) u e^{i\omega t} \quad (16.13)$$

$$F_0 u e^{i\omega t} = \left(-m\omega^2 + C\omega i + K \right) u e^{i\omega t} \quad (16.14)$$

$$F_0 u = f_0 \quad \text{seelim} \quad (16.15)$$

Diğer yandan tahrik kuvvet fonksiyonunu $\mathbf{F}(t) = f_0 e^{i\omega t}$ biçiminde ifade etmiş olsaydık

$$f_0 e^{i\omega t} = -m u \omega^2 e^{i\omega t} + C u i \omega e^{i\omega t} + K u e^{i\omega t} \quad (16.16)$$

$$f_0 e^{i\omega t} = u e^{i\omega t} (-m \omega^2 + C \omega i + K) \quad (16.17)$$

Bir yukarıda verilen $F_0 u e^{i\omega t} = (-m \omega^2 + C \omega i + K) u e^{i\omega t}$ ifadesinin aynısını elde etmiş olacaktık, o halde eşitliklere $f_0 e^{i\omega t} = u e^{i\omega t} (-m \omega^2 + C \omega i + K)$ ile devam edersek.

$$f_0 = u K \left(\frac{-m \omega^2}{K} + \frac{C \omega}{K} i + 1 \right) \quad (16.18)$$

$$u = \frac{f_0}{K \left(\frac{-m \omega^2}{K} + \frac{C \omega}{K} i + 1 \right)} = \frac{f_0}{K \left(\frac{-m \omega^2}{K} - \left(-\frac{C \omega}{K} \right) i + 1 \right)} \quad (16.19)$$

$$u = \frac{f_0}{(-m \omega^2 + C \omega i + K)} = \frac{f_0}{(-m \omega^2 - (-C \omega i) + K)} \quad (16.20)$$

$$\beta = K - m \omega^2 \quad \alpha = -C \omega \quad (16.21)$$

Kütlenin ihmal edildiği durum içinse tek fark

$$u = \frac{f_0}{C \omega i + K} = \frac{f_0}{-(-C \omega i) + K} \quad (16.22)$$

$$\beta = K \quad \alpha = -C \omega \quad (16.23)$$

Olup ifadenin devamındaki β ve α 'lı formülasyonlarda bir değişikliğe yol açmamaktadır.

$$u = f_0 \frac{1}{(\beta - \alpha i)} = f_0 \frac{1}{(\beta - \alpha i)} \frac{(\beta + \alpha i)}{(\beta + \alpha i)} = f_0 \frac{(\beta + \alpha i)}{(\beta^2 - \alpha^2 i^2)} = f_0 \frac{(\beta + \alpha i)}{(\beta^2 + \alpha^2)}$$

Kompleks sayılara ilişkin bir kaç hatırlatma yapılmak gerekirse

$$z = a + bi \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (16.24)$$

İfadeye kalan yerden devam edecek olursak

$$|u| = \sqrt{\frac{f_0^2}{(\beta^2 + \alpha^2)^2} (\beta^2 + \alpha^2)} = \frac{f_0}{(\beta^2 + \alpha^2)} \sqrt{\beta^2 + \alpha^2} = \frac{f_0}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} \quad (16.25)$$

u_{din} 'i tanıtmak gerekirse

$$|u| = u_{din} = f_0 \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} \quad (16.26)$$

Diğer yandan

$$|H(\omega)| = \frac{u_{din}}{u_{stat}} = \frac{f_0 \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}}{f_0} = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}} \quad (16.27)$$

Ve aşağıdaki formülasyonda pay ve paydayla çarpılan L niceliği $\frac{1}{|H(\omega)|}$ olarak seçilirse

$$\tan \theta = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{L \sin \theta}{L \cos \theta} = \frac{\frac{1}{|H(\omega)|} \sin \theta}{\frac{1}{|H(\omega)|} \cos \theta} \quad (16.28)$$

$$\alpha = L \sin \theta \quad \beta = L \cos \theta \quad (16.29)$$

$$\mathbf{u}(t) = u e^{i\omega t} = f_0 \frac{(\beta + \alpha i)}{(\beta^2 + \alpha^2)} e^{i\omega t} = f_0 \frac{(\beta + \alpha i)}{(\beta^2 + \alpha^2)} (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) \quad (16.30)$$

$$\mathbf{u}(t) = \frac{f_0}{(\beta^2 + \alpha^2)} (\beta \cos(\omega t) + \beta i \sin(\omega t) + \alpha i \cos(\omega t) + \alpha i^2 \sin(\omega t)) \quad (16.31)$$

$$\mathbf{u}(t) = \frac{f_0}{(\beta^2 + \alpha^2)} (\beta \cos(\omega t) + \beta i \sin(\omega t) + \alpha i \cos(\omega t) + \alpha i^2 \sin(\omega t)) \quad (16.32)$$

$$\mathbf{u}(t) = \frac{f_0}{(\beta^2 + \alpha^2)} (L \cos \theta \cos(\omega t) + L \cos \theta i \sin(\omega t) + L \sin \theta i \cos(\omega t) - L \sin \theta \sin(\omega t)) \quad (16.33)$$

$$\mathbf{u}(t) = \frac{f_0}{(\beta^2 + \alpha^2)} L ((\cos \theta \cos(\omega t) - \sin \theta \sin(\omega t)) + i (\cos \theta \sin(\omega t) + \sin \theta \cos(\omega t))) \quad (16.34)$$

$L = \frac{1}{|H(\omega)|}$ ve $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \alpha^2}}$ yukarıdaki ifadede yerlerine konursa

$$\mathbf{u}(t) = f_0 \frac{|H(\omega)|^2}{|H(\omega)|} ((\cos \theta \cos(\omega t) - \sin \theta \sin(\omega t)) + i(\cos \theta \sin(\omega t) + \sin \theta \cos(\omega t))) \quad (16.35)$$

$$\mathbf{u}(t) = f_0 \frac{|H(\omega)|^2}{|H(\omega)|} (\cos(\omega t + \theta) + i \sin(\omega t + \theta)) = f_0 |H(\omega)| (\cos(\omega t + \theta) + i \sin(\omega t + \theta)) \quad (16.36)$$

$$\mathbf{u}(t) = u e^{i\omega t} = f_0 |H(\omega)| e^{i(\omega t + \theta)} \quad (16.37)$$

Bu bağlamda yer değiştirme fonksiyonunun zamana göre türevleri alınır

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = i\omega f_0 |H(\omega)| e^{i(\omega t + \theta)} \quad (16.38)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = i^2 \omega^2 f_0 |H(\omega)| e^{i(\omega t + \theta)} = -\omega^2 f_0 |H(\omega)| e^{i(\omega t + \theta)} \quad (16.39)$$

Bu ifadeleri kullanarak, tahrik kuvveti $\mathbf{F}(t) = f_0 e^{i\omega t} = F_0 \sin(\omega t)$ nin yanısıra, yük hücreğine etkiyen kuvvet , yani okunan kuvvet $\mathbf{F}_T(t)$ yi yazmak istersek

$$\mathbf{F}_T(t) = m\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) \quad (16.40)$$

$$\mathbf{F}_T(t) = m(-\omega^2 f_0 |H(\omega)| e^{i(\omega t + \theta)}) + C(i\omega f_0 |H(\omega)| e^{i(\omega t + \theta)}) + K(f_0 |H(\omega)| e^{i(\omega t + \theta)}) \quad (16.41)$$

$$\mathbf{F}_T(t) = f_0 |H(\omega)| (-m\omega^2 + i\omega C_0 + K) e^{i(\omega t + \theta)} \quad (16.42)$$

ve ifadeyi kütlenin olmadığı durum için yeniden yazmak gerekirse

$$\mathbf{F}_T(t) = f_0 |H(\omega)| (K + i\omega C_0) e^{i(\omega t + \theta)} \quad (16.43)$$

$$\beta = K \quad \Lambda = C \omega = -\alpha \quad (16.44)$$

$$\mathbf{F}_T(t) = f_0 |H(\omega)| \{ \beta \cos(\omega t + \theta) + \beta i \sin(\omega t + \theta) + \Lambda i \cos(\omega t + \theta) + \Lambda i^2 \sin(\omega t + \theta) \} \quad (16.45)$$

$$\mathbf{F}_T(t) = f_0 |H(\omega)| \{ \beta \cos(\omega t + \theta) + \beta i \sin(\omega t + \theta) + \Lambda i \cos(\omega t + \theta) - \Lambda \sin(\omega t + \theta) \} \quad (16.46)$$

$$\mathbf{F}_T(t) = f_0 |H(\omega)| \{ (\beta \cos(\omega t + \theta) - \Lambda \sin(\omega t + \theta)) + i(\beta \sin(\omega t + \theta) + \Lambda \cos(\omega t + \theta)) \} \quad (16.47)$$

$$\tan \delta = \frac{\Lambda}{\beta} = \frac{\sin \delta}{\cos \delta} \quad \Lambda = \sin \delta \quad \beta = \cos \delta \quad (16.48)$$

$$\mathbf{F}_T(t) = f_0 |H(\omega)| \{ (\cos \delta \cos(\omega t + \theta) - \sin \delta \sin(\omega t + \theta)) + i(\cos \delta \sin(\omega t + \theta) + \sin \delta \cos(\omega t + \theta)) \} \quad (16.49)$$

$$\mathbf{F}_T(t) = f_0 |H(\omega)| (\cos(\omega t + \theta + \delta) + i \sin(\omega t + \theta + \delta)) = f_0 |H(\omega)| e^{i(\omega t + \theta + \delta)} \quad (16.50)$$

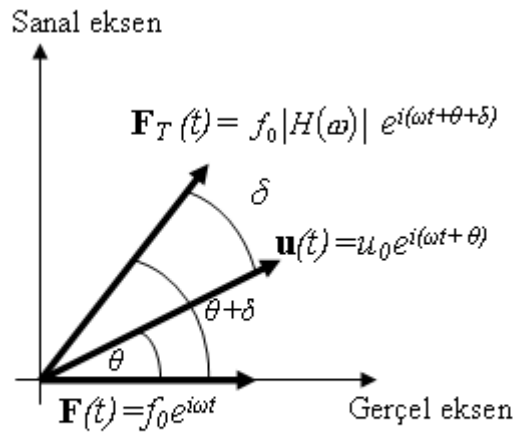
eşitliğinin yanısıra, ki bu ifadenin yük hücresinden okunan kuvvet, yani kauçuğun soğurması sonrasında arta kalan kuvvet olduğunun altını önceden çizmiştik, daha önce bulunan ifadelerden okunan yer değiştirme

$$\mathbf{u}(t) = u e^{i\omega t} = f_0 |H(\omega)| e^{i(\omega t + \theta)} = u_0 e^{i(\omega t + \theta)} \quad (16.51)$$

ve tahrik kuvveti

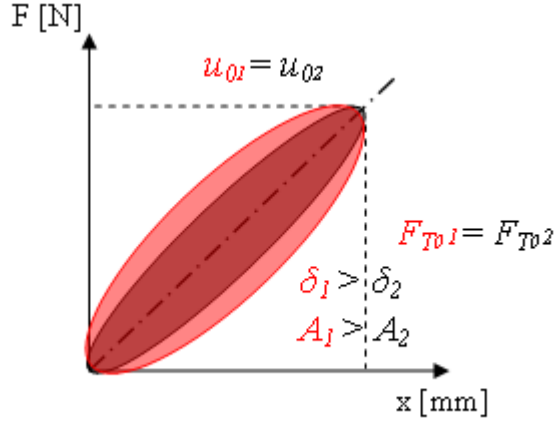
$$\mathbf{F}(t) = f_0 e^{i\omega t} \quad (16.52)$$

de gerçel ve sanal eksenlerde göstermek gerekirse.



Şekil 16.8 tahrik kuvveti $\mathbf{F}(t)$, yer değiştirme cevabı $\mathbf{u}(t)$ ve yük hücresinde okunan kuvvet $\mathbf{F}_T(t)$ in gerçel ve sanal eksenlerde vektörel gösterimleri.

Şekilde fiziksel anlamı belirtilen δ kayıp açısı olarak adlandırılıp (bkz şekil 16.8), kauçukta histerisis alanının darlığını ya da genişliğini tanımlar, ki histerisisin yükleme ve boşaltma eğrileri arasında kalan bu alan soğurulan enerjiyi verdiği için, kayıp açısı δ , parçanın titreşim emme yeterliliğiyle doğrudan ilgilidir.



Şekil 16.9 A_1, A_2 , histerisis alanları, δ_1 ve δ_2 kayıp açılarıyla ilişkisi

Şekildeki veriler ışığında, dinamik rijitlik adı verilen kavram K_{dyn} , dinamik test cihazlarının yazılımında (Instron-Schenck, MTS) yeralan hesaplama formülasyonu ile ifade edilecek olursa [12]

$$K_{din} = \frac{F_{T0}}{u_{T0}} \quad (16.53)$$

ki bu durumda yukarıdaki şekil için

$$K_{din1} = \frac{F_{T01}}{u_{T01}} = \frac{F_{T02}}{u_{T02}} = K_{din2} \quad (16.54)$$

Buradan kayıp açısı δ yi içeren formülasyona geçiş için test cihazındaki yazılım aşağıdaki eşitlikten yararlanır.[12] A_0 histerisisin kapladığı alan olmak üzere

$$\sin(\delta) = \frac{4A_0}{\pi F_{T0} u_{T0}} \quad \delta = \sin^{-1} \left(\frac{4A_0}{\pi F_{T0} u_{T0}} \right) \quad (16.55)$$

Buradan daha önce analitik yaklaşımla elde edilmiş açılımlarda yeralan K_{stat} , C ve ω kavramına geçiş yapmak gerekirse [12]

$$K = K_{stat} = K_{din} \cos(\delta) \quad \text{ve} \quad C = \frac{K_{din}}{\omega} \sin(\delta) \quad (16.56)$$

Bu iki ifadenin birbiriyle yapacağı formülasyonlar sonucunda

$$\frac{K_{stat}}{K_{din}} = \cos(\delta) \quad \frac{C\omega}{K_{din}} = \sin(\delta) \quad (16.57)$$

$$\frac{(K_{stat})^2}{(K_{din})^2} = \cos^2(\delta) \quad \frac{(C\omega)^2}{(K_{din})^2} = \sin^2(\delta) \quad (16.58)$$

$$\frac{(K_{stat})^2}{(K_{din})^2} + \frac{(C\omega)^2}{(K_{din})^2} = \cos^2(\delta) + \sin^2(\delta) = 1 = \frac{(K_{stat})^2 + (C\omega)^2}{(K_{din})^2} \quad (16.59)$$

$$(K_{din})^2 = (K_{stat})^2 + (C\omega)^2 \quad K_{din} = \sqrt{(K_{stat})^2 + (C\omega)^2} \quad (16.60)$$

İfadeleri elde edilmiş olur.

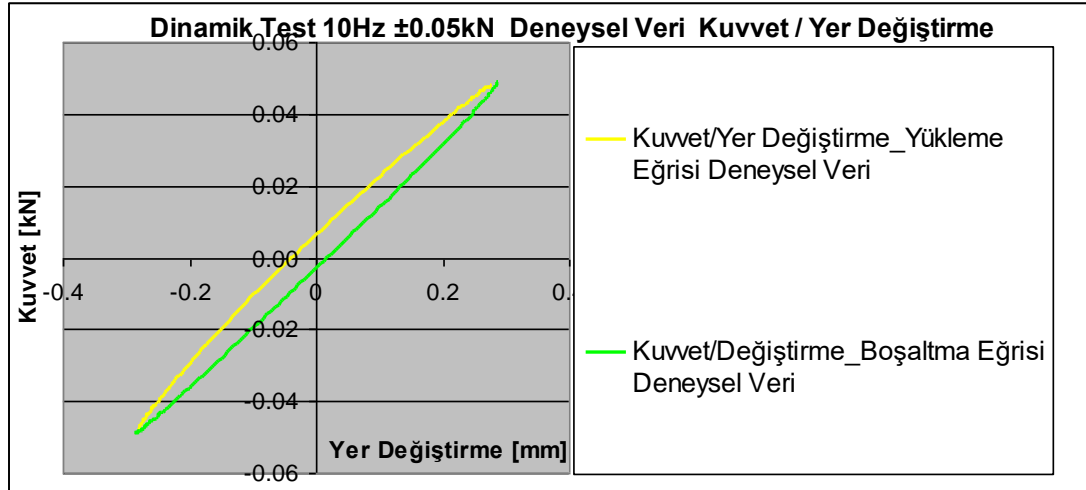
İlgili şekil incelenecek olursa, aynı K_{dyn} değerine haiz ancak, kayıp açısı birbirinden farklı kauçuk karışımlara rastlanabileceği görülecektir. Statik rijitliği aynı bile olsa, kayıp açısı δ si farklılık gösteren diğer bazı karışımların mekanik davranışları da farklı olur, bunlardan biri olan soğurulan enerjinin ısıya dönüşmesi ve ömür testiyle ilişkisine aşağıda değinilmiştir.

Arada kalan alanın büyüklüğüyle doğru orantılı olarak soğurulan bu enerji ısıya dönüştüğü için, kauçuğun büyük bir δ ya sahip olması , büyük bir histeresis alanına sahip olduğu anlamına gelir, ve paralelinde ısıya dönüştürmek üzere soğurduğu enerji miktarının fazla olacağı ve ömür testi gibi çok tekrarlı çevrimlerde, parçanın depoladığı ısıyı aynı hızla atamayacağı, dolayısıyla parçanın ısınacağına işaretler. Diğer yandan kauçuğun rijitliği ortam sıcaklığından oldukça fazla etkilendiğinden ($T_{ortam} [^{\circ}C] \uparrow \Rightarrow K [N/mm] \downarrow$), ısınan parça aynı yük altında, düşen rijitliğinden ötürü, gittikçe daha büyük bir yerdeğiştirme kateder hale gelecek, özellikle ömür testinin ilerleyen safhalarında, aynı yük altında daha fazla yer değiştirme, aynı yük altında, yer değiştirmeyle orantılı olarak kesit alanının daha da daralması,ve kauçuğun teşkil ettiği birim alan üzerindeki gerilme değerinin bu biçimde gitgide yükselmesi, yorulma ve kopma riskini arttıracaktır.

Yukarıda verilen matematiksel ifadeler sayısal örneklerle desteklenecek olursa, deneysel verilerle birebir kıyaslama yapılacağından, öncelikle dinamik test cihazının ölçüm yöntemi olarak kullandığı

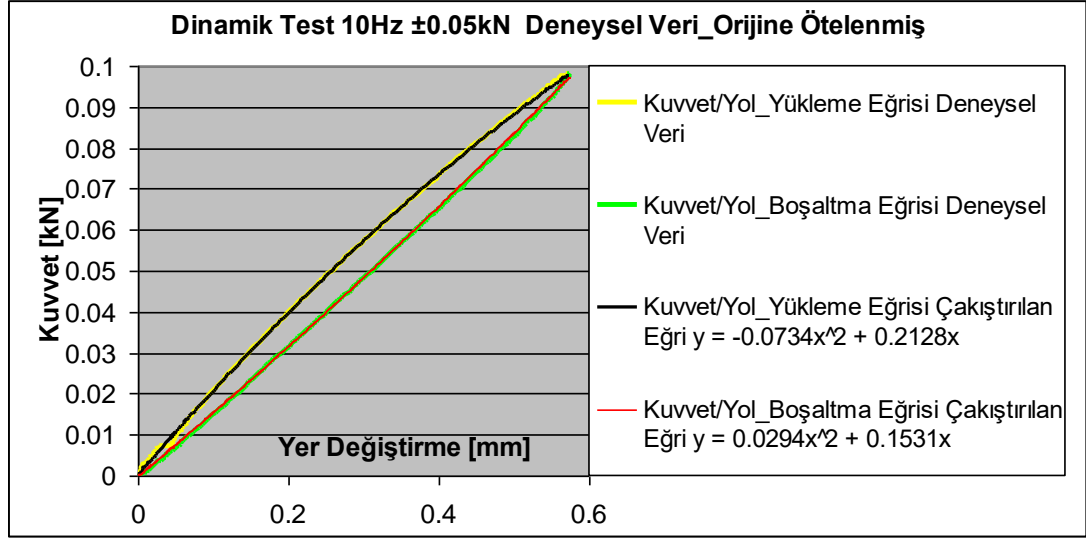
$$\delta = \sin^{-1} \left(\frac{4A_0}{\pi F_{T0} u_{T0}} \right) \quad (16.61)$$

İfadelerindeki histerisisin çevrelediği alan olan A_0 'ın deneysel verilerden yola çıkarak hesaplanabilmesi adına deney sonuçlarının ilk çevrimine ait histerisi aşağıdaki şekil doğrultusunda ele alalım. (Normalde statik testlerde en az 3. çevrim, dinamik testlerde ise frekansa bağlı olmak üzere daha yukarı sayıdaki çevrimler hesaplama için kullanılmaktayken, bu örnekte ilk çevrimin hangi maksatla tercih edildiği daha sonra açıklanacaktır.)



Şekil 16.10 Disk denek 10Hz'de ±0.05 kN yük genliğinde dinamik test

Histerisisin içinde kalan alanı hesaplamak için, yükleme ve boşaltma eğrilerine ayrı ayrı 2. dereceden polinomlar çakıştırılacaktır. Daha sonra bu polinomların integralleri alınacak ve arada kalan alan integrallerin farkı olarak elde edilecektir. Ancak eksiden artıya geçişlerdeki işlem fazlalıklarından kurtulmak adına, arada kalan alanın skaler değerini değiştirmeyeceğinden, histerisisin minimum noktası orine ötelenecek ve bahsi geçen işlemler bu aşamadan sonra gerçekleştirilecektir. Histerisis öteleme işlemi ve çakıştırılan polinom eğrileri, matematiksel ifadeleriyle birlikte aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 16.11 Orijine ötelenmiş histerisis

İlgili polinomların integralleri, sıfırdan 0.572'ye kadar integre edilirse, öncelikle yükleme eğrisi için

$$Y_1 = \int_0^{0.572} (-0.0734x^2 + 0.2128x) dx = -0.02447x^2 + 0.109x + D \Big|_0^{0.572} \quad (16.62)$$

Orijine ötelenmiş histerisiste yükleme ve boşaltma eğrileri için $x=0$ iken $y=0$ olduğu için, ilgili integral sabiti D yükleme ve boşaltma eğrisi için de sıfır olacaktır.

$$Y_1 = -0.02447x^2 + 0.109x \Big|_0^{0.572} = 0.03024 \quad (16.63)$$

Diğer yandan boşaltma eğrisi için

$$Y_2 = \int_0^{0.572} (0.0294x^2 + 0.1531x) dx = 0.0098x^2 + 0.07655x + D \Big|_0^{0.572} = 0.02688 \quad (16.64)$$

$$A_0 = Y_1 - Y_2 = 0.03024 - 0.02688 = 0.00336 \text{ mm}^2 \quad (16.65)$$

Öte yandan 10 Hz'lik testte bir tam çevrim ($0 > 2\pi$ 'lik dairesel bir döngü) 0.1s süreceğinden, ele alınan ilk çevrim sonunda okunan yer değiştirme tam olarak 0.1s'de değil $u(t) = u_0 e^{i(\omega t + \theta)}$ ifadesi gereğince, θ kadar bir gecikmeyle sıfıra erişecektir. Okunan yer değiştirmenin sıfıra ulaştığı saniye değerinden 0.1 çıkartılıp, bulunan fark 0.1'e bölünür ve 2π ile çarpılırsa θ 'nın radyan cinsinden değeri elde

edilmiş olur. Bu örnekte $\theta = 0.053724$ [rad] = 3.076923 [°] olarak bulunmuştur. Tahrik kuvveti ve okunan yer değiştirmenin zamana bağlı değişimine ait grafik gösterimine geçmeden önce bir uyarı yapmak faydalı olacaktır; “*okunan yer değiştirme tam olarak 0.1s’de değil, θ kadar bir gecikmeyle sıfıra erişecektir*” ifadesi kullanıldığında her ne kadar okunan yer değiştirme, zaman ekseninde 0.1 saniyeden daha sonra x eksenine kesişecek gibi bir beklenti oluşsa da $\mathbf{u}(t) = u_0 \sin(\omega t + \theta)$ ifadesi, sadece kıyas maksadıyla $\mathbf{u}(t) = u_0 \sin(\omega t)$ gibi bir ifadeyle birlikte herhangi bir matematik yazılımına girilip grafikleri alınacak olursa, θ kadar bir gecikmeye haiz $\mathbf{u}(t) = u_0 \sin(\omega t + \theta)$ ifadesinin x eksenini daha önce kestiği görülecektir. Bu trigonometrik bir sonuçtur ve her ne kadar ilk planda fiziksel beklentiyle çelişkili gibi gözükse de gecikmenin zaman eksenindeki yansımaya mutlak değer olarak bakıldığında, eğrilerin birbirlerini hangi gecikme rejiminde takip ettiğinin yorumlanmasında bir aykırılık yaratmamaktadır. Bu uyarı ışığında, grafik gösterime geçmeden önce uygulanan tahrik kuvveti $\mathbf{F}(t) = f_0 \sin(\omega t)$ ve okunan yer değiştirme $\mathbf{u}(t) = u_0 \sin(\omega t + \theta) = f_0 |H(\omega)| \sin(\omega t + \theta)$ ‘nin yanısıra, kauçuğun soğurmasının ardından yük hücresinden okunan kuvvet $\mathbf{F}_T(t) = f_0 |H(\omega)| \sin(\omega t + \theta + \delta)$ ifadesinde yeralan kayıp açı δ ‘nın da ifadeye eklenmesi sonucu, ilgili niceliğin zamana bağlı değişimini gösteren eğrinin x eksenini diğer iki eğriden de önce kesecek olduğunu hatırlatalım. Öte yandan

$$\delta = \sin^{-1} \left(\frac{4A_0}{\pi F_{T0} u_{T0}} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{4A_0}{\pi F_{okunanMAX} u_{okunanMAX}} \right) \quad (16.66)$$

ifadesiyle kayıp açının hesabına girilecek olursa

$$\delta = \sin^{-1} \left(\frac{4 * 0.00336}{3.14 * 0.09794 * 0.572} \right) = 0.07641 \text{ rad} = 4.376^\circ \quad (16.67)$$

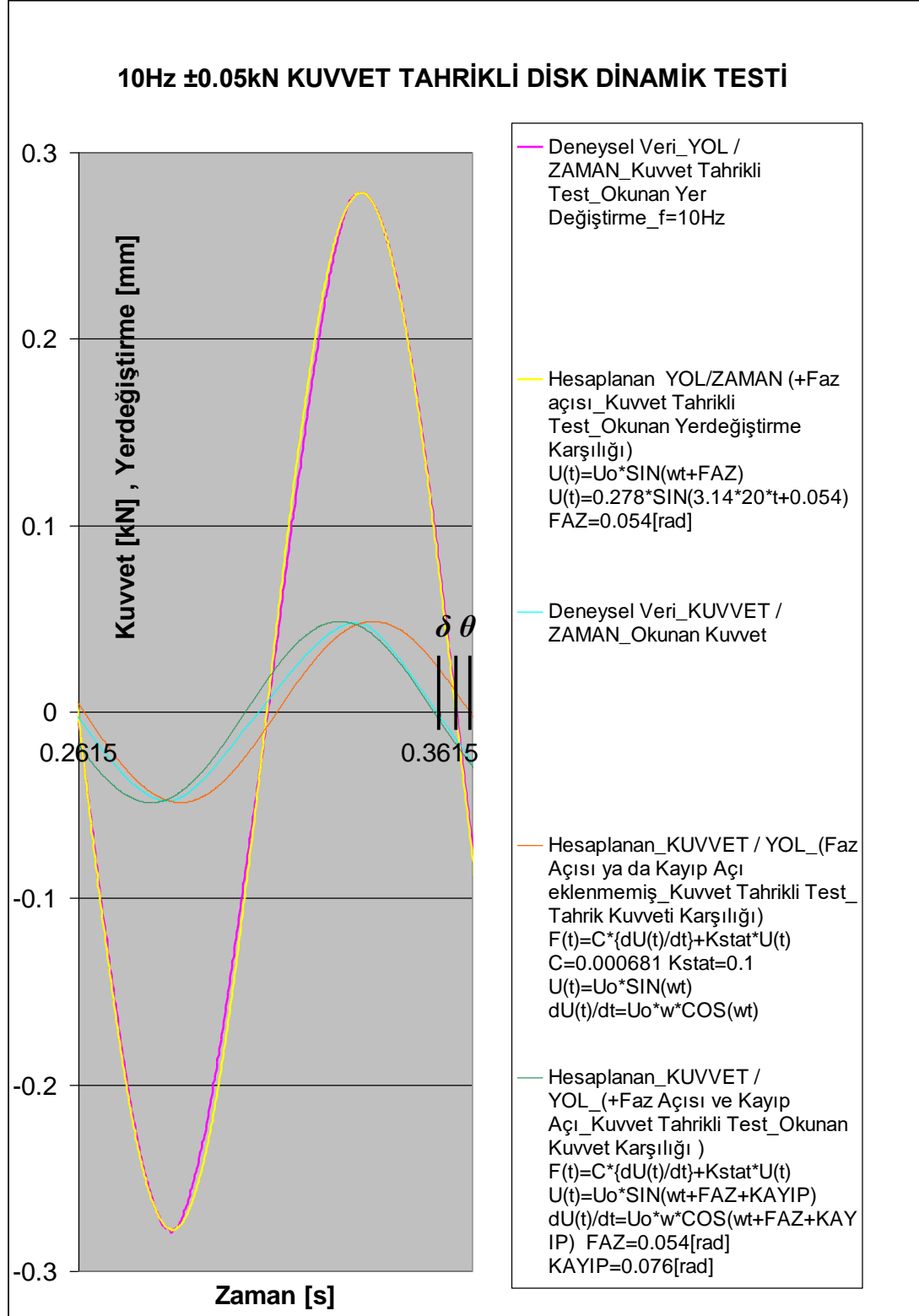
$$\text{bunu takiben } K_{din} = \frac{F_{okunanMAX}}{u_{okunanMAX}} = \frac{0.09794}{0.572} = 0.1706 \text{ kN/mm} \quad (16.68)$$

$$\text{ki buradan da sönüm katsayısı } C \text{’yi elde etmek için (f=10Hz)} \quad (16.69)$$

$$C = \frac{K_{din}}{\omega} \sin(\delta) = \frac{K_{din}}{2 * f} \sin(\delta) = \frac{0.1706}{2 * 10} \sin(0.07641) = 0.00065 \text{ kNs/mm} \quad (16.70)$$

Son olarak hareket denkleminde yay katsayısı olarak yerine konacak olan $K=K_{stat}$ 'ı elde etmek için

$$K = K_{stat} = K_{din} \cos(\delta) = 0.1706 * \cos(0.07641) = 0.17 \text{ kN/mm} \quad (16.71)$$



Şekil 16.12 10Hz ± 0.05 kN kuvvet tahrikli disk dinamik testi

Yukarıdaki şekilde yer alan garfik gösterimle ilgili açıklamalara geçmeden önce yapılması gereken bir hatırlatma da θ ve δ açılarının okur tarafından rahat incelenebilmesi için kuvvet-zaman eğrilerinin tümünün aynı oranda ölçeklendirilerek garfiğe aktarıldığıdır. Skaler değerleri göze alındığında θ ve δ açılarının x ekseninde kaplayacakları mesafenin daha küçük olduğu aşıkardır. Diğer bir ön açıklama da, zaman ekseninin 1. çevrime neden $t_0=0.2615s$ 'de başladığına dair olacaktır. Bu aradaki süre cihazın teste başlamasının ardından, denek diskin monte edilirken üzerinde kalan ön yükü sıfıra geri getirmek için harcadığı süredir, zira bu süre, zaman ekseninin çevrim bitimine ait değeri olan $t=0.3615$ 'ten çıkartılacak olursa $t-t_0=0.3615-0.2615=0.1s$ bulunur ki bu da 10Hz'in saniye cinsinden karşılığıdır. ($t=1/f=1/10Hz=0.1s$)

Daha önce açıklanacağından bahsedilmiş olan, grafiğe aktarılmak üzere neden ilk çevrimin seçilmiş olduğunun nedeni ise şudur: Yukarıdaki grafikte hesap yoluyla bulunan kuvvet-zaman eğrilerinin sahip olduğu gecikmeler 0'da ve 2π 'de, yani zaman ekseninde ifade edilecek olursa 0.2615. ve 0.3615. saniyelerde aynıdır, hatta $t=0$ iken $u=0$ sınır şartı kullanılarak elde edilmiş “hesaplanan okunan kuvvet eğrisi” de matematiksel yapısı gereği $t=0$ iken $u=0$ 'dan geçmemektedir. Oysa kauçuktaki yerdeğiştirme, $\omega t=2\pi$ 'de ya da $t=0.3615s$ 'de tahrik kuvvetine göre bir geçikmeye sahipken, $t=0$ 'da $u=0$ 'dır. Kauçuğun, hareket denklemlerindeki ifadelerle tam olarak karşılanamayan bu özelliğini vurgulamak adına ilk çevrim seçilmiştir, nitekim sonraki çevrimlerde tahrik kuvveti ve okunan yer değıştirmenin, deneysel sonuçlarda da aynı t anında çevrime başlamayacakları aşıkardır.

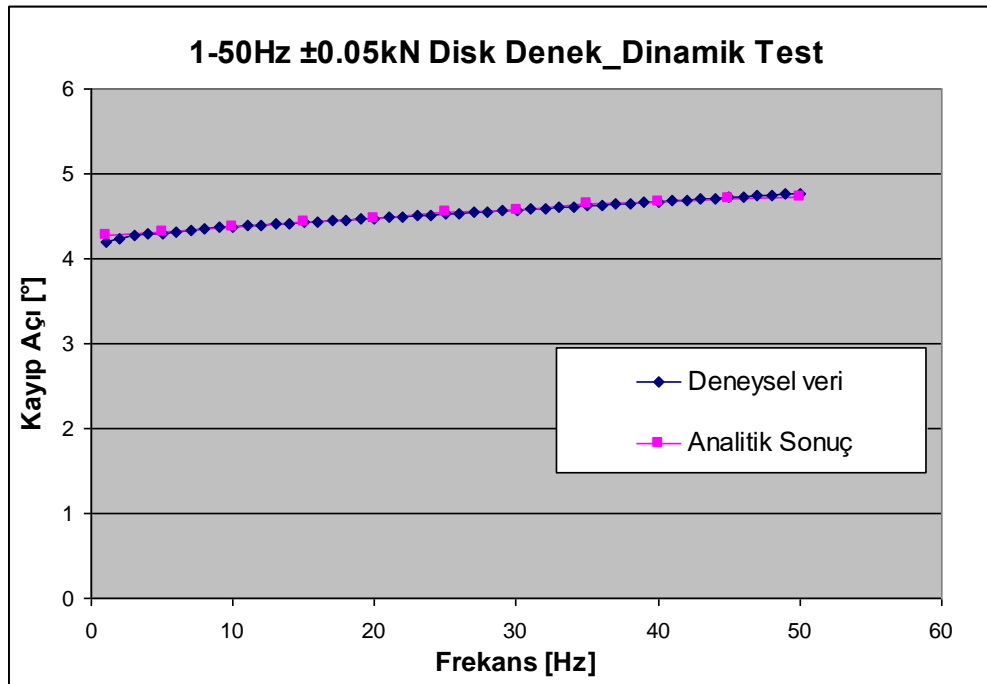
İleride disk ve nihai parçanın artan frekanstaki taramalarında, 1'den 50Hz'e ve 10'dan 400Hz'e kadar değışen frekans aralığında incelemeye müsait pek çok frekans adımı olmasına rağmen niçin 10Hz'in örneklendiğinin açıklaması şudur: 10Hz, gerek düşük frekans taraması diye adlandırılan 1-50Hz artan frekans tetsinde, gerekse yüksek frekans taraması diye anılan 10-400Hz artan frekans testinde katedilen bir frekans adımıdır. 10Hz'lik bir titreşimde , düşük frekans taramasında , 0.05kN karşılığı katedilen yer değıştirme $\pm 0.28mm$ de, yüksek frekans taramasında 0.0085kN karşılığı katedilen yer değıştirme $\pm 0.05mm$ de çok küçük yerdeğıştirmeler olduklarından, aynı 10Hz'de tahrik edildikleri için, okunan en yüksek kuvvet değeri farklı da olsa, okunan bu en yüksek kuvvet değeri onunan en yüksek

yer deşiştirmelere oranı , yan dinamik rijitlikler 10Hz’lik adımda birbirine çok yakındır. Bu anlamda 1-50Hz’lik testin 10. Hz’ine dair elde edilen deneysel, analitik ve sonlu elemanlar analiz sonuçlarının, 10-400Hz’lik teste ait 10Hz’inde bulunanlarla karşılaştırması ve bir nevi yönetm ve işlemlerin sağlaması yapılmış olur. 10Hz’lik adımlara ait bahsedilen deneysel, analitik ve sonlu elemanlar analiz sonuçlarının skaler değerleri, ilerid verilecek olan grafiklerde, bu yüksek ve alçak frekanstaki taramalar arasında da kıyaslanabilir.

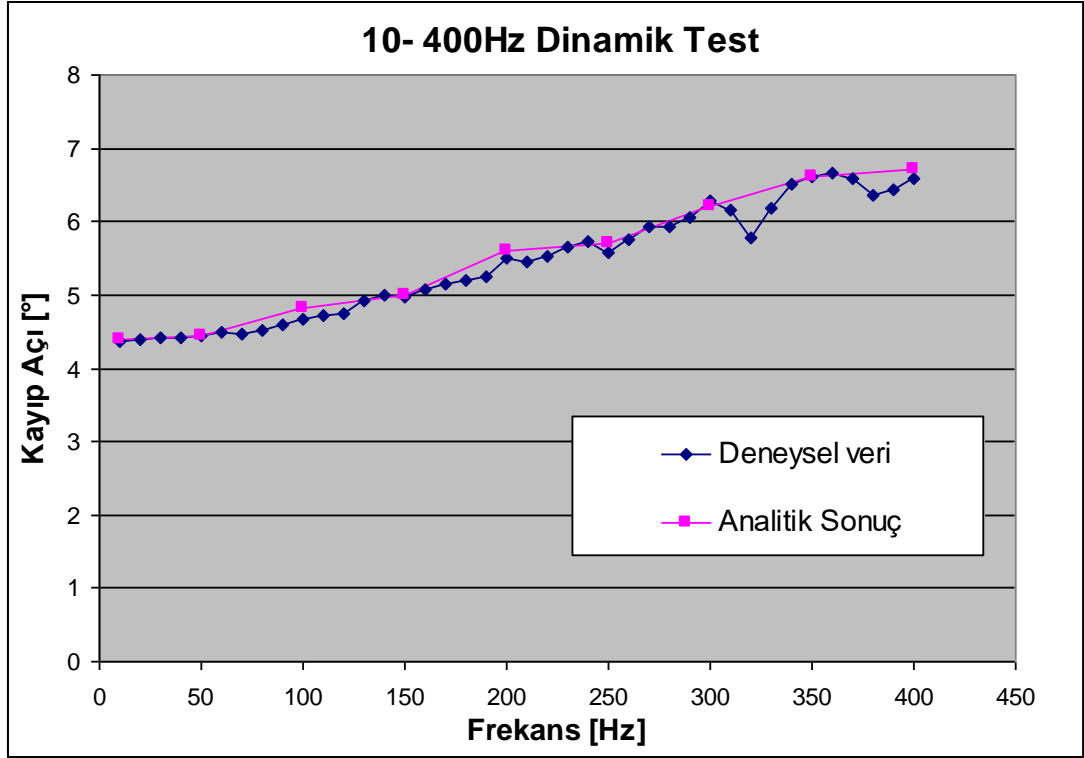
Bu aşamaya geçmeden önce, 10Hz için akışı verilen analitik yönteme haiz işlem dizisi, 1-50Hz’lik düşük frekanstaki taramanın tamamı için 5Hz’lik adımlarla, ve 10-400Hz’lik yüksek frekanstaki taramanın bütünü için 50Hz’lik adımlarla devam ettirilecek olursa, öncelikle ilgili frekans adımlarına ait histerisislerin çevrelediği alanları integral yöntemiyle tek tek hesaplayıp, bu alanlara ait skaler değerlerin yereldiği

$$\delta = \sin^{-1} \left(\frac{4A_0}{\pi F_{T0} u_{T0}} \right) = \sin^{-1} \left(\frac{4A_0}{\pi F_{okunanMAX} u_{okunanMAX}} \right) \quad (16.72)$$

ifadesinden yola çıkarak ilgili frekans adımları için analitik yöntemle elde edilen kayıp açılar, cihazın hesapladıklarının üzerine çakıştırmalı olarak aşağıdaki grafik gösterimlerde, düşük ve yüksek frekans taramaları için ayrı ayrı verilmiştir.



şekil 16.13 1-50Hz ±0.05kN kuvvet tahrikli disk dinamik testi, Frekans [Hz] / Kayıp Açı [°]



Şekil 16.14 10-400Hz ± 0.05 kN kuvvet tahrikli disk dinamik testi, Frekans [Hz] / Kayıp Açısı [°]

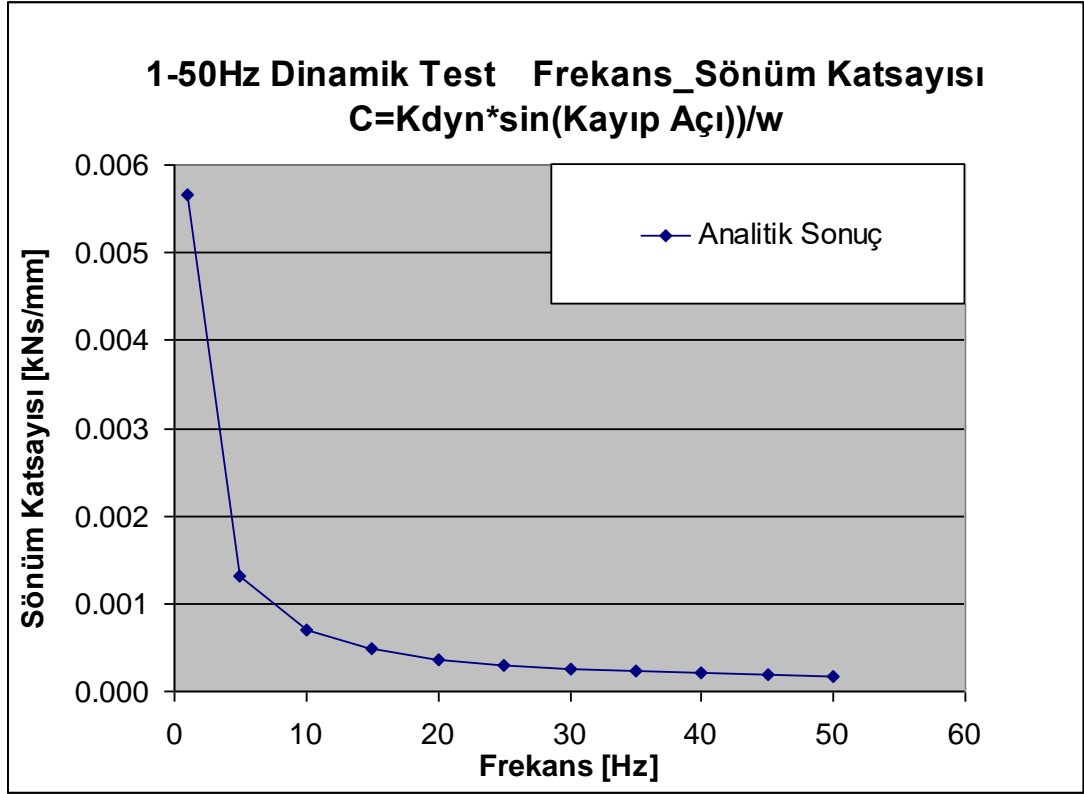
Bu işlemin ardından $K_{din} = \frac{F_{okunanMAX}}{u_{okunanMAX}}$ ifadesiyle ilgili dinamik rijitlikler

hesaplanır. Dinamik rijitliklere ait analitik sonuçların deneysel sonuçlarla karşılaştırmalı grafikleri, her üç sonucunda aynı anda karşılaştırılabilmesi amacıyla, sonlu elemanlar sonuçlarının da açıklandığı bölümde, toplu olarak verilecektir.

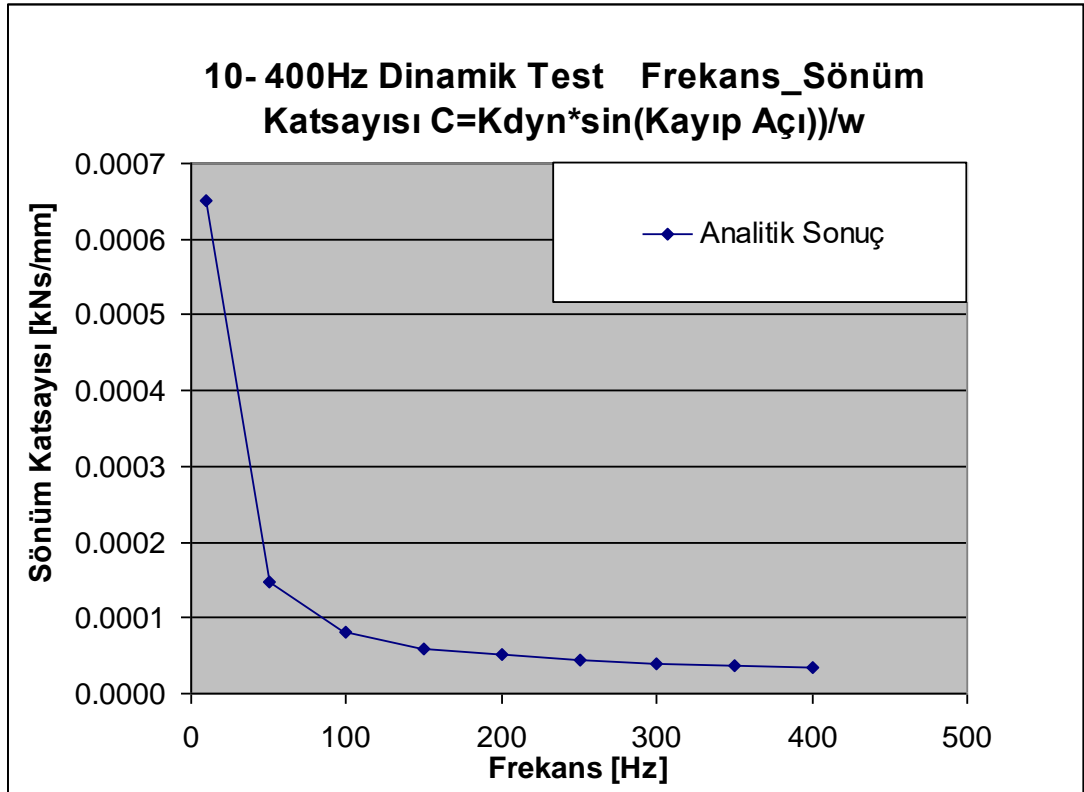
Bunu takiben, elde edilen dinamik rijitliklerin yer aldığı ifade olan

$$C = \frac{K_{din}}{\omega} \sin(\delta) \text{ eşitliği yardımıyla frekansa bağlı olarak değişen sönüm katsayısı}$$

değerleri elde edilir. Yine düşük ve yüksek frekanstaki taramalar için ayrı ayrı olmak kaydıyla, C 'nin frekansa bağlı değişiminin analitik yöntemle elde edilmiş değerleri aşağıdaki grafiklerde verilmiştir.



Şekil 16.15 1-50Hz $\pm 0.05\text{kN}$ kuvvet tahrikli disk dinamik testi, Frekans [Hz] / Sönüm Katsayısı [kNs/mm]



Şekil 16.16 10-400Hz $\pm 0.05\text{kN}$ kuvvet tahrikli disk dinamik testi, Frekans [Hz] / Sönüm Katsayısı [kNs/mm]

Yukarıdaki grafiklerden sönüm katsayısının frekansa bağlı değişimi incelenecek olursa, özellikle birinci basmaktan ikinciye geçişte çok büyük değişim yaşandığı farkedilir, bunun nedeni sönüm katsayısının hesap edildiği formül $C = \frac{K_{din}}{\omega} \sin(\delta)$ 'deki paydanın, ifadenin değerini doğrudan etkilemesinden ötürüdür. Buna rağmen hesaplanan dinamik rijitliklerde aynı belirgin değişim gözlenmeyecektir, bunun nedeni hareket denkleminde yola çıkarak da temellendirilebilir.

$$K_{din} = \frac{F_{okunanMAX}}{u_{okunanMAX}} = \frac{F_{TMAX}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{u_{MAX}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{C u_0 \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + K_{stat} u_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{u_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} \quad (16.73)$$

Neticede toplanan iki terimden ilkinin çarpanı olan sönüm katsayısı C'nin kendisinin, diğer terime kıyasla çok küçük değerlere haiz olması (bkz yukarıdaki iki grafik) ve ek olarak sönüm katsayısı C'nin yer aldığı ilgili terimdeki diğer bir çarpan olan $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)$ 'nın da $\theta = 0.054 \text{ rad}$ için $-\sin(0.054) = -0.05397$ gibi çok küçük bir değer almasıdır. Buna mukabil diğer terimdeki $K_{stat}=0.17\text{kN/mm}$, bir önceki terimin çarpanı C'ye göre çok büyük bir değere sahip olmasının yanı sıra, K_{stat} 'ın yer aldığı bu terimdeki $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$ 'nın $\theta = 0.054 \text{ rad}$ için $\cos(0.054) = 0.99854$ gibi 1'e çok yakın bir değer almasıdır. Bu veriler ışığında bir sonraki adım olan kauçuk dinamik testi kavramına geçilebilir.

16.2.2 Kauçuk Disk Dinamik Testi

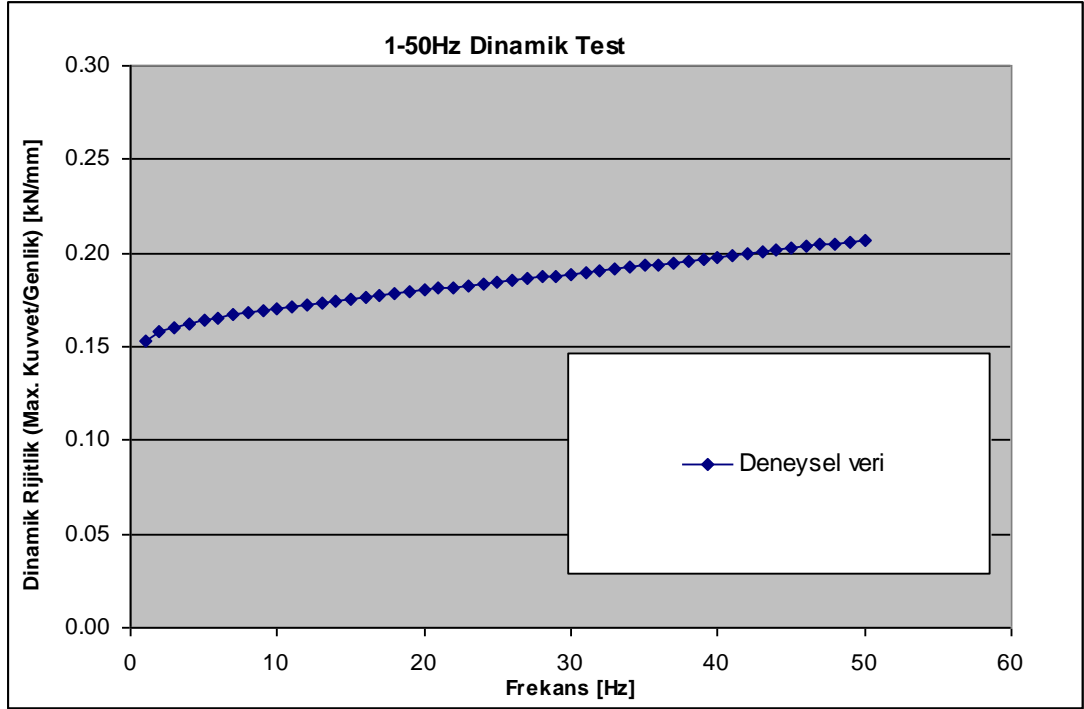
En başta kauçuk gövdeli titreşim emici takozlardaki dinamik kavramını, bilinen belli başlı dinamik analizler olan, modal analiz, harmonik analiz ve geçiş analizinden ayırılım. Kauçuk takozlarda ana sanayinin tedarikçilerden beklediği, araçtan araca değişmekle beraber, binek araçlar için genelde 15Hz, 25Hz ve 150Hz komşuluklarında kauçuk takozun sergilediği K_{dyn} cevabının müşteriye tayin edilmiş sınırlar dahilinde kalması (kauçuk ve motor takozları söz konusu olduğunda genelde $\pm\%15$) ve buna ek olarak 1Hz'den başlayarak 50Hz'e kadar 1'er Hz'lik adımlarla

artan ve 10Hz'den 600Hz'e kadar 10'ar Hz'lik adımlarla artan dinamik taramalarda, kauçuk parçanın rezonansa girmemesi, ve her frekans adımı başına tayin edilmiş K_{dyn} cevabının müşteriye belirlenmiş sınırlar dahilinde kalması, ve konu kapsamında incelenecek harmonik analizde taranacak frekanslar ($1 \gg 50\text{Hz}$ ve $10 \gg 400\text{Hz}$) dahilinde kauçuk takozun rezonansa girmediği (birinci doğal frekansı ω_{n1} 'e dahi erişmediği) deneysel sonuçlar doğrultusunda kesin olarak bilindiğinden, analizimizde, müşterinin bizden ikinci beklentisi olan, ilgili frekans adımlarında, K_{dyn} 'nin müşteriye saptanmış sınır değerler içinde kalıp kalmadığı sorgulanacaktır.

Dolayısıyla bizim ihtiyaçlarımız doğrultusunda, bilindik harmonik analizlerdeki, rezonansa girecek frekansın tayini değil de, 1'er Hz'lik adımlarla 1-50Hz 'lik ve 10Hz'lik adımlarla 10-400Hz'lik *artan frekans karşısında rijitlik cevabı* taramalarında, hangi frekans adımında rezonans yaşayacağı değil, uygulanan tahrikin uygulama hızı (frekansı) arttırıldıkça rijitliğinin frekans bazında, hangi eğimde artış göstereceği incelenecek, ve statik testlerde olduğu gibi, nihai konstrüksüyona haiz olmayan bir test plakası (bu durumda disk) , üzerinden alınan verilerle MARC'taki malzeme modeline tanıtılacak 'frekans adımlarına bağlı dinamik rijitlik değişimi' diyebileceğimiz bir özelliğin, nihai konstrüksüyonun aynı frekanslardaki taramalarından çıkan rijitlik cevaplarıyla uyuşup uyuşmadığını sorgulamak olacaktır.

16.2.2.1 Malzeme Özelliğinin Tanıtılması

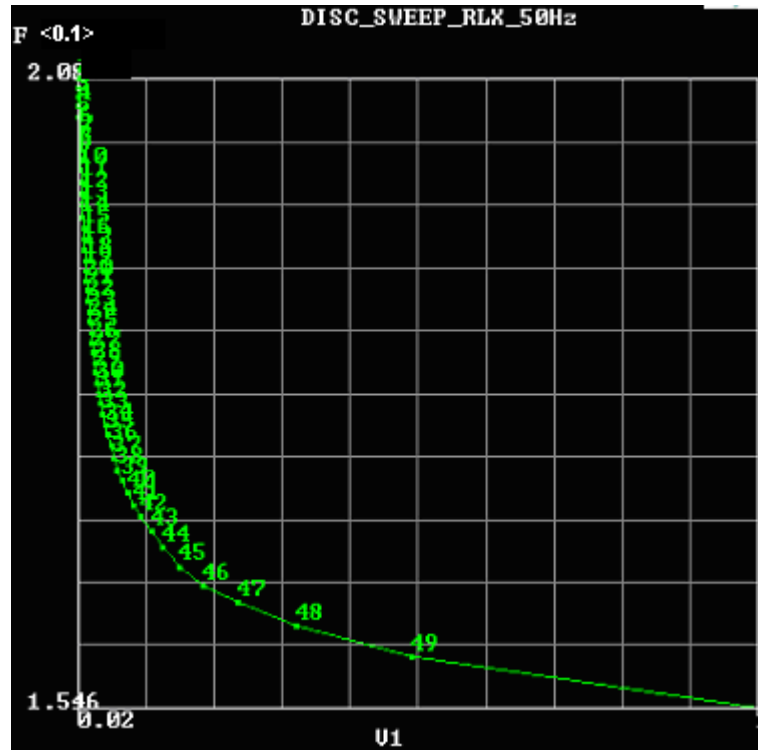
Öncelikle statik testlerinden tanıdığımız Ø36x18mm'lik diski, bu defa alt ve üst yüzeylerinin vulkanizasyon esnasında yapıştırıldığı metal plakalara sabitlenmesi, ardından da üst plakanın test cihazının tahrik koluna, alt plakanın da yük hücreğine monte edilmesini takiben , $\pm 0.2\text{mm}$ 'lik bir genlikte 1Hz'den 50Hz'e dek 1'er Hz'lik adımlarla ve $\pm 0.05\text{mm}$ 'lik genliklerde 10Hz'den 400Hz'e 10'ar Hz'lik adımlarla dinamik testleri gerçekleştirecek, her iki tarama aralığı için x eksenini ilgili frekans adımları ve y eksenini, o frekans adımında okunan dinamik rijitlik (F_{dyn}/S_{dyn} [N/mm]) (bkz Şekil 16.17)



Şekil 16.17 Disk denek üzerinden dinamik malzeme modeli oluşturulacak verinin alınması 1-50Hz’lik tarama

Ve Hz başına ilgili frekans değerini 1’e bölüp saniye cinsinden elde ettiğimiz zamanı, $\pm 2\text{mm}$ ’nin toplam yol açılımının altına payda olarak yazıyoruz ve her Hz için bu yöntemle tayin edilen 50 farklı hızla yapılacak 50 analizden elde edilen gerilme değerlerini, MARC’ın deneysel sonuçlara uyuşacak şekilde vermesi için, “V1 hızıyla yükleme yaptığında, V1 hızına karşılık gelen gerilmeye git; V2 hızıyla yükleme yaptığında, V2 hızına karşılık gelen gerilmeye git..... V50 hızıyla yükleme yaptığında, V50 hızına karşılık gelen gerilmeye git” mantığını yazılıma verecek bir eğri çiziyoruz. Bu eğride en düşük hızın 1Hz’den, en yüksek hızınsa 50Hz’den elde edileceği aşıkardır. Hazırlayacağımız eğri test hızına bağlı gerilme cevaplarını taşıdığı için, MARC’a (OGDEN malzeme modeli söz konusu olunca) ancak relaksasyon eğrisini girdiğimiz “Viscoelasticity” modülünden girilebilmektedir. (Mooney malzeme modelleri için “Rate Effect” modülünden de tanıtılabilir; ancak bu durumda adım sayısı 15 ile sınırlanır). Bu örnekte ilgili eğri OGDEN malzeme modelini kullanıp “Viscoelasticity” modülünden girileceği için, bu modülün kabul edebileceği eğri tipi olan Prony Serisi’nin azalma rejimine uymak adına, en yüksek hızla karşılık gelen gerilme, en yüksek gerilme olacağından bu gerilmeyi y_1 olarak atayıp, yanısıra yine aynı en yüksek hızla en kısa test süresi olan $t_1=1/50\text{Hz}=0.02\text{s}$ karşılık geldiğinden, bu değer x_1 ,yani x ekseninin ilk değeri olarak atanmalıdır.

Benzer şekilde 49Hz'e karşılık gelecek en yüksekten bir düşük gerilme değeri y_2 olarak atanıp, en kısa test süresinden bir uzun süre olan $t_2=1/49\text{Hz}= 0.0204\text{s}$ de x_2 olarak atanacaktır. Ancak bu şekilde Prony Serisine ait azalma rejimini temsil eden bir eğri elde edilebilir. Bu şekilde elde edilen eğri "Viscoelasticity" modülüne girildiği vakit, "50Hz için V_1 hızıyla yükleme yaptığında; yani testin t_1 süresine geldiğinde σ_1 gerilmesine kadar düş, 49Hz için V_2 hızıyla yükleme yaptığında; yani testin t_2 süresine geldiğinde σ_2 gerilmesine kadar düş.....ve 1Hz için V_{50} hızıyla yükleme yaptığında; yani testin t_{50} süresine geldiğinde σ_{50} gerilmesine kadar düş" mantığı, ilgili eğriyle yazılıma girilir. Tarif edilen eğriyi örneklemek gerekirse



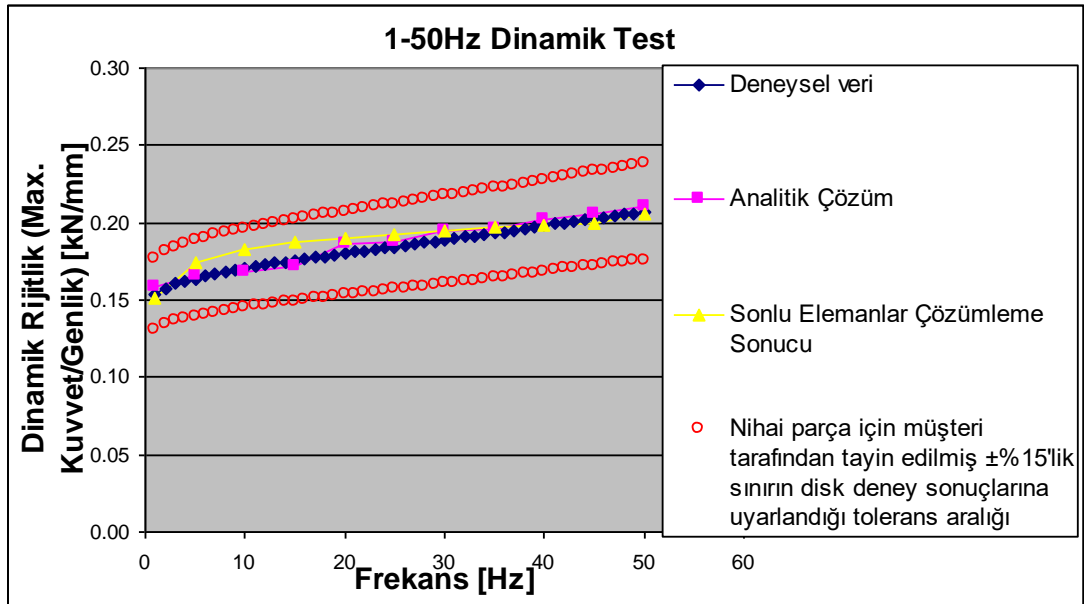
Şekil 16.18 Disk denek üzerinden 1-50Hz'lik taramayla alınan verilerden malzeme modeline tanıtmak üzere oluşturulan eğri , x ekseninde yer alan gerilme değerleri, eksenin yukarısında yer alan (x.1) ibaresinden de anlaşılacağı üzere $\cdot 10^{-1}$ biçiminde ifade edilmiştir.

Bir önceki şekil olan Şekil 16.7'deki 50Hz'e karşılık gelen gerilme değeri 0.2084 kN/mm^2 , y_1 değeri olarak atanır (bkz. Şekil 16.8) , x_1 değeri ise ilgili 50Hz'lik testin bir çevriminin tamamlanma süresi olan $t_1=1/50\text{Hz}=0.02\text{s}$ olarak belirlenir. (bkz. Şekil 16.8) Benzer şekilde 49Hz, 48Hz, 47Hz... için gereken y ve x değerleri hesaplanarak grafiğe girilir, atanacak son değer çifti olan 1Hz'e ait y_{50} ve x_{50} 'nin nasıl hesaplandığı örneklenecek olursa, yine Şekil 16.7'deki 1Hz'e karşılık gelen gerilme değeri 0.1546 kN/mm^2 , y_{50} değeri olarak atanır (bkz. Şekil 16.8), x_{50}

değeri de ilgili 1Hz'lik testin bir çevriminin tamamlanma süresi olan $t_1=1/1\text{Hz}=1\text{s}$ olarak hesaplanır. (bkz. Şekil 16.8) Dolayısıyla 50Hz'e karşılık gelen V_1 hızında analiz $t_1=1/50\text{Hz}=0.02\text{s}$ süreceğinden, MARC, OGDEN formülasyonu doğrultusunda elde ettiği 0.2mm'deki gerilme değerini, Prony Serisinde $t_1=0.02\text{s}$ 'ye karşılık olarak girilen gerilme değerine kadar düşürecektir. Benzer şekilde 49Hz'e karşılık gelen V_2 hızında analiz $t_2=1/49\text{Hz}=0.0204\text{s}$ süreceğinden, MARC, 0.2mm için elde ettiği gerilme değerini, Prony Serisinde $t_2=0.0204\text{s}$ 'ye karşılık olarak girilen gerilme değerine kadar düşürecek, analizler, bu biçimde, ilgili frekansların tekabül ettiği hızlar için ardışır gerçekleştirildiğinde en son 1Hz'e karşılık gelen V_{50} hızında analiz $t_{50}=1/1\text{Hz}=1\text{s}$ süreceğinden, MARC, 0.2mm için elde ettiği gerilme değerini, Prony Serisinde $t_{50}=1\text{s}$ 'ye karşılık olarak girilen gerilme değerine kadar düşürecektir.

16.2.2.2 Analizin Gerçekleştirilmesi

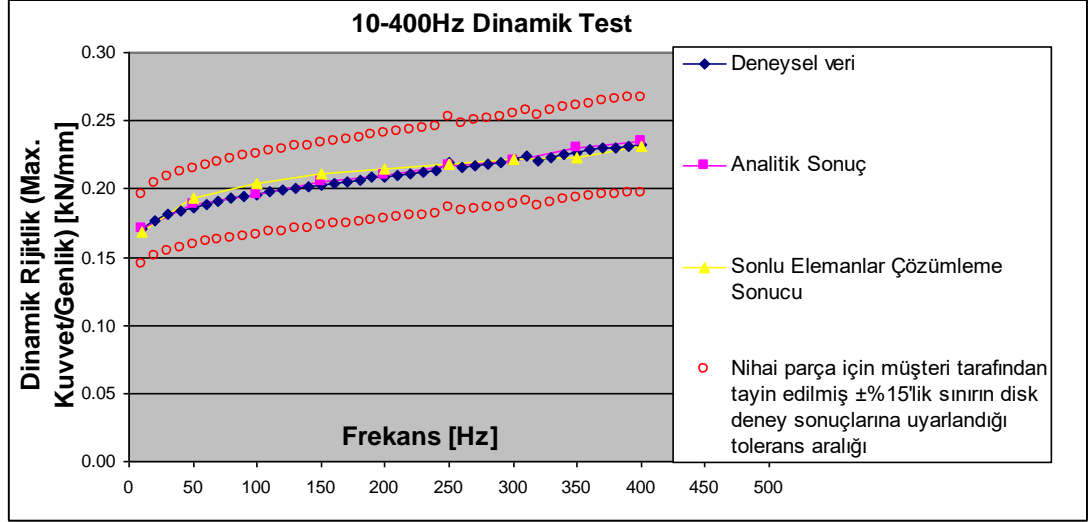
Bahsedilen işlemi 1-50Hz ve 10-400Hz için ,öncelikle disk deneyini simule ettirerek gerçekleştirecek, çözümleme sonuçları, deneysel verilerle örtüştüğü takdirde, nihai bir konstrüksüyona haiz olmayan bir diskten elde ettiğimiz bu verilerle oluşturduğumuz malzeme modeli özelliğinin, nihai konstrüksüyona sahip final parçanın deneysel sonuçlarıyla örtüşüp örtüşmeyeceğini sorgulayacağız. Diskin simülasyon sonuçlarına dönüp, ilgili analiz sonuçlarını 1-50Hz ve 1-400Hz için diske ait deneysel sonuçlarla kıyaslamak istersek,



Şekil 16.19. 1-50Hz'de $\pm 0.05\text{kN}$ genliğindeki kuvvet tahrikli test için disk deney verisinden elde edilmiş malzeme modeliyle yapılan analiz sonuçları ve analitik sonuçların, diskten deneysel sonuçlarıyla kıyaslanması

Kıyaslama sonucunun olumlu olup olmayacağına dair genel bir yargıya daha çabuk ulaşmak adına, sonlu elemanlar çözümlemesi ve analitik yöntemler ilk planda 5Hz’lik adımlar için gerçekleştirilmiştir. Çakışma performansının olumlu olduğu hükmüne varılırsa nihai parça söz konusu olduğunda ilgili işlemler her frekans adımı için gerçekleştirilecektir.

Aşağıda yer alan şekil 16.10’daki 10-400Hz’lik taramaya ait sonuçların çakışma performansı da uygun olduğundan, analiz yöntemi nihai parçanın sonlu elemanlar analizi için de uygun bulunmuştur.



Şekil 16.20 10-400Hz’de ± 0.0085 kN genliğindeki kuvvet tahrikli test için disk deney verisinden elde edilmiş malzeme modeliyle yapılan analiz sonuçları ve analitik sonuçların, diskin deneysel sonuçlarıyla kıyaslanması

17. Bitmiş Parça Testleri



17.1 Instron- Schenck Statik-Dinamik test cihazına bağlı haldeki motor takozu

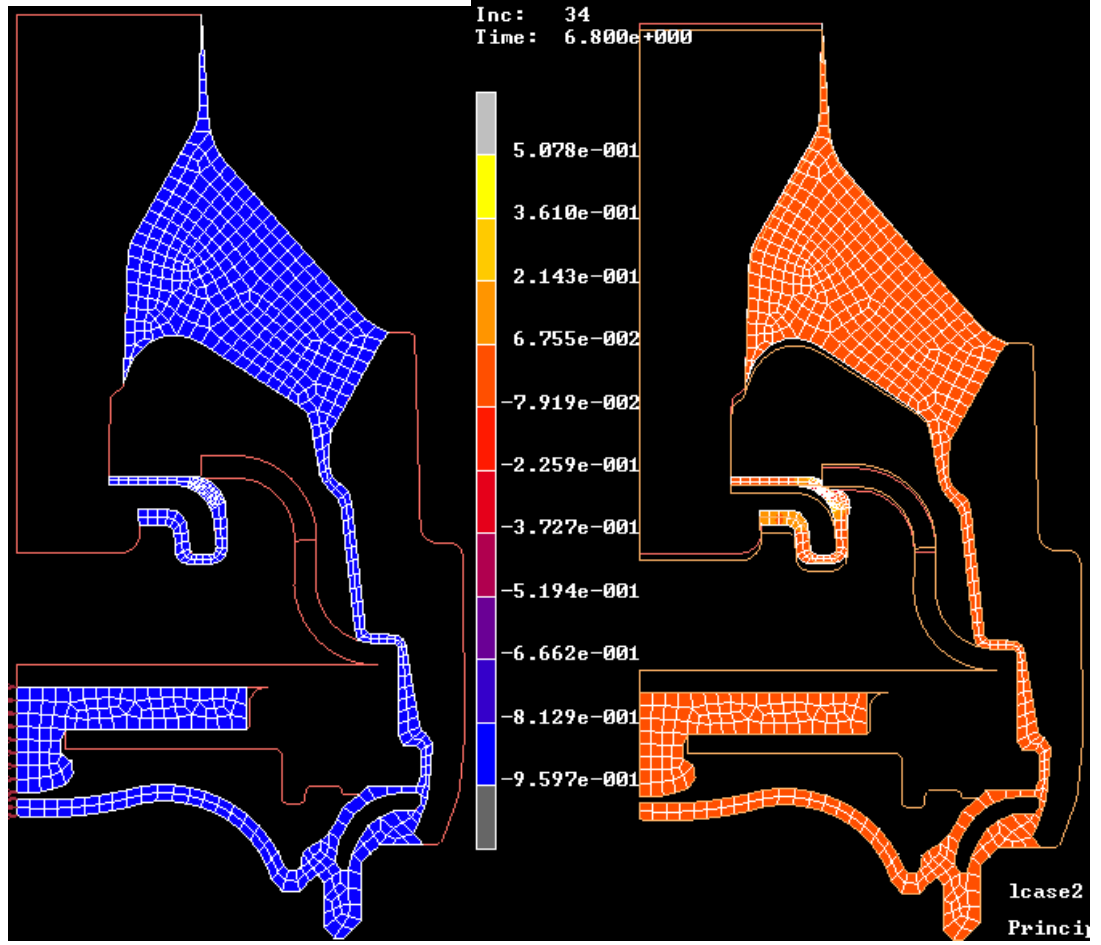
17.1.Bitmiş Parça Statik Testleri

İlgili testler olan 10mm/dk, 3. çevrim, ± 1 mm genliğindeki statik test ve , 10mm/dk, 3 çevrim, 0-10mm'lik yer değiştirmedeki doyurma testleri, remedildiği üzere Instron –Schenck cihazlarında gerçekleştirilerek analiz sonuçları, deney sonuçlarıyla karşılaştırılmalı olarak raporlanmıştır.

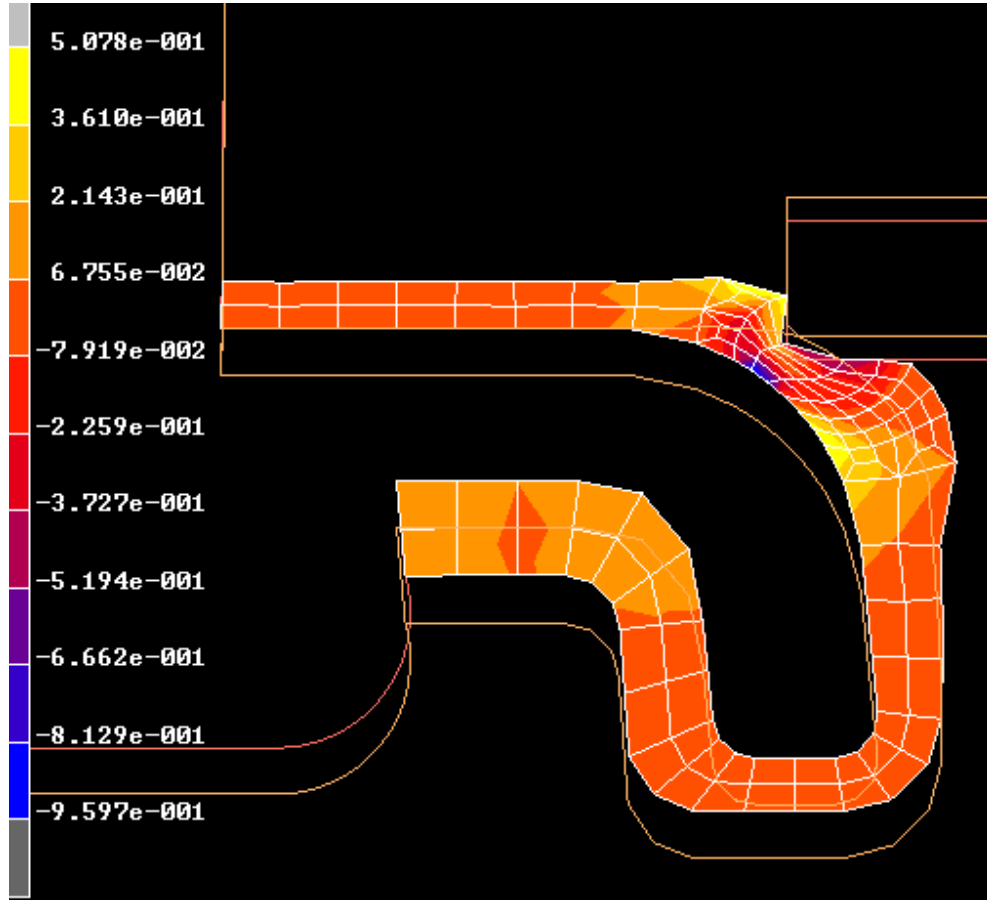
17.1.1. Bitmiş Parça Çözümleme Sonuçlarının DeneySEL Sonuçlarla Kıyaslanması

MARC'ta modellenen motor takozuna, şartnamesinde tanımlanan bitmiş parça testleri (10mm/dk'da 3 çevrimlik ± 1 mm ve 0-10mm iki test) yazılımda simule ettirilmiş ve çözümleme sonuçları, bitmiş parçaya ait deneySEL sonuçlarla kıyaslanmıştır.

17.1.1.1 Test:10mm/dk, 3 çevrim, ± 1 mm

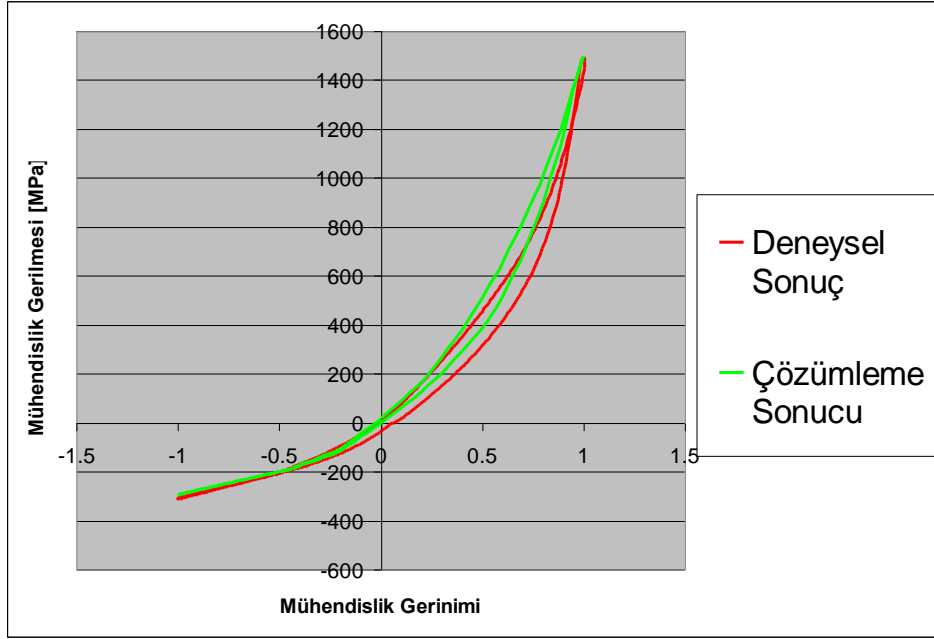


Şekil 17.2 .Eksenel simetrik modellemede statik konum ve en yüksek gerinimdeki gerilme dağılımı , model üzerinde gösterim



Şekil 17.3 En kritik zorlanma yaşayan kısım-büyütülmüş

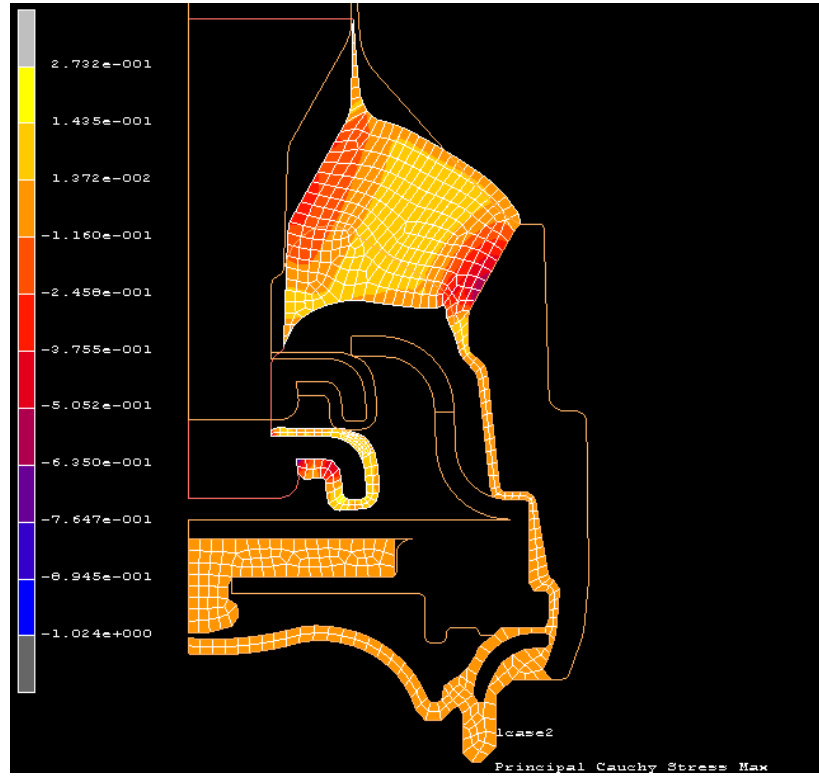
Bu kısım parça serbest konumundayken de rijit üst dayanağına bir parça batık vaziyette durduğundan. Daha yukarı çekilmek istendiğinde ,ezilmek üzere, rijit alt aksam alt sınırına dağın, çok az et kalınlığında bir kauçuk bırakılmış olduğundan, eğri artı kısmında aniden dikleşmekte ve eksi kısma geçerkende, parça serbest konumunda bir miktar batık halde olduğuna değinilen mantar kısım battığı yerden boşalırken rijitlikte ani düşmeler olmaktadır. Bu olayın simulasyonunda dikkat edilecek bir husus da, parça serbest konumunda, yani sıfır gerilmede kalmaya devam ederken, sadece mantar kısmın tepesindeki rijit elemana batırılacağı ve buradaki ön yer değiştirmenin bir test başlangıç koşulu olduğu; kaçınılmaz bir şekilde $t=0$ ve $x=0$ 'dayken bir ön gerilme doğuracağı ve bu ön gerilmenin miktarının iyi tespit edilip, analiz sonucu test sonucuyla karşılaştırılmadan önce aynı miktardaki gerilmenin çıkartılarak (çünkü başta çekiyordu ve çekme gerilmesi gereği işareti artıydı) raporlanmadan önce yeniden sıfıra ötelenmesi gerektiği unutulmamalıdır.



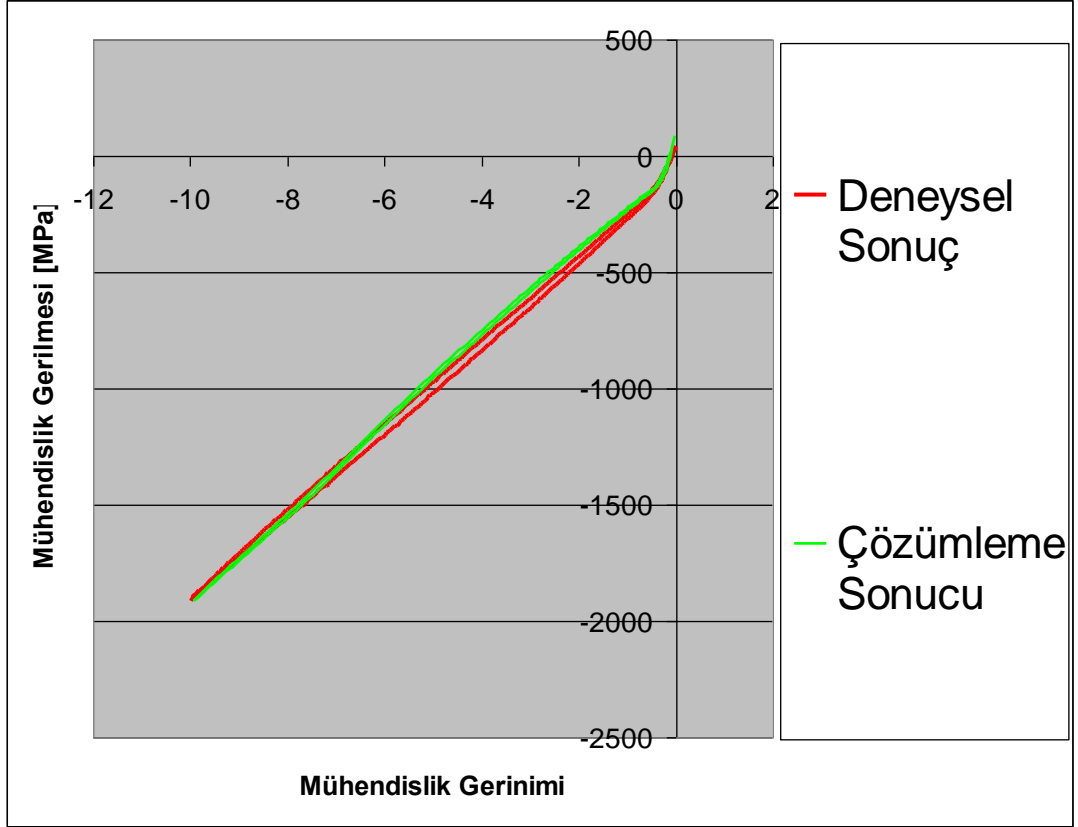
Şekil 17.4. Deneysel sonuç ve çözümleme sonuçları, grafik gösterim

17.1.1.2. Test:10mm/dk, 3 çevrim, 0-10mm'lik

Bu test doyurma testi diye adlandırılıp parçanın yaşayabileceği öngörülen en yüksek yer değiştirmenin 2 ila 3 katı kadarı yaşatılır.



Şekil 17.5.Eksenel simetrik modellemede en yüksek gerinimdeki gerilme dağılımı , model üzerinde gösterim

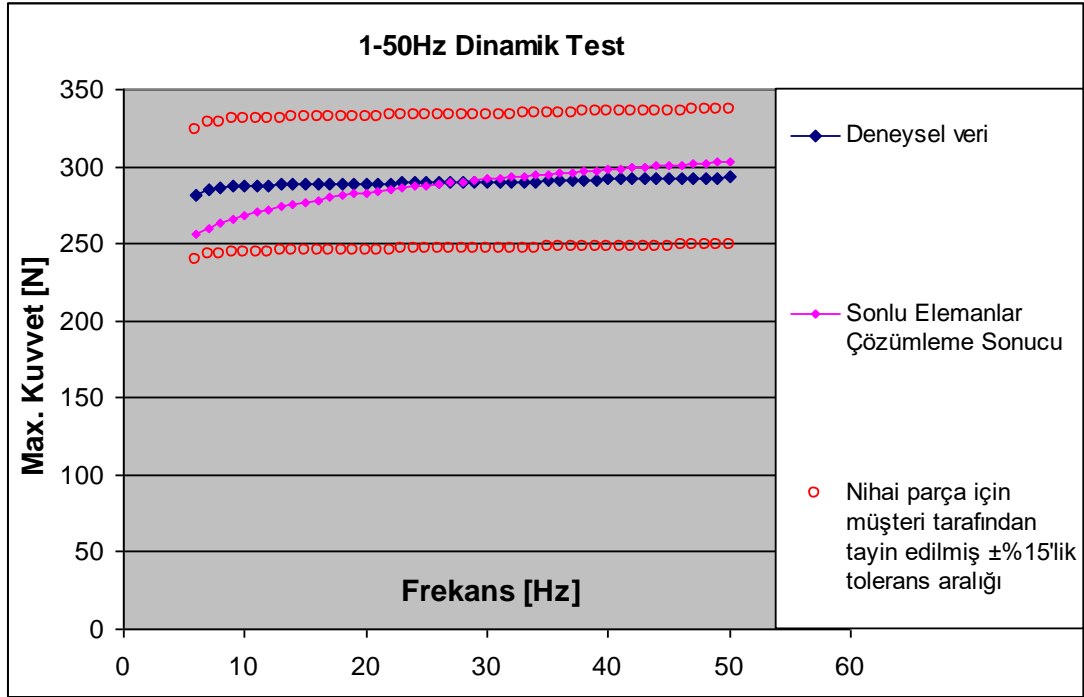


Şekil 17.6. Deneysel sonuç ve çözümleme sonuçları , grafik gösterim

17.2.Bitmiş Parça Dinamik Testleri

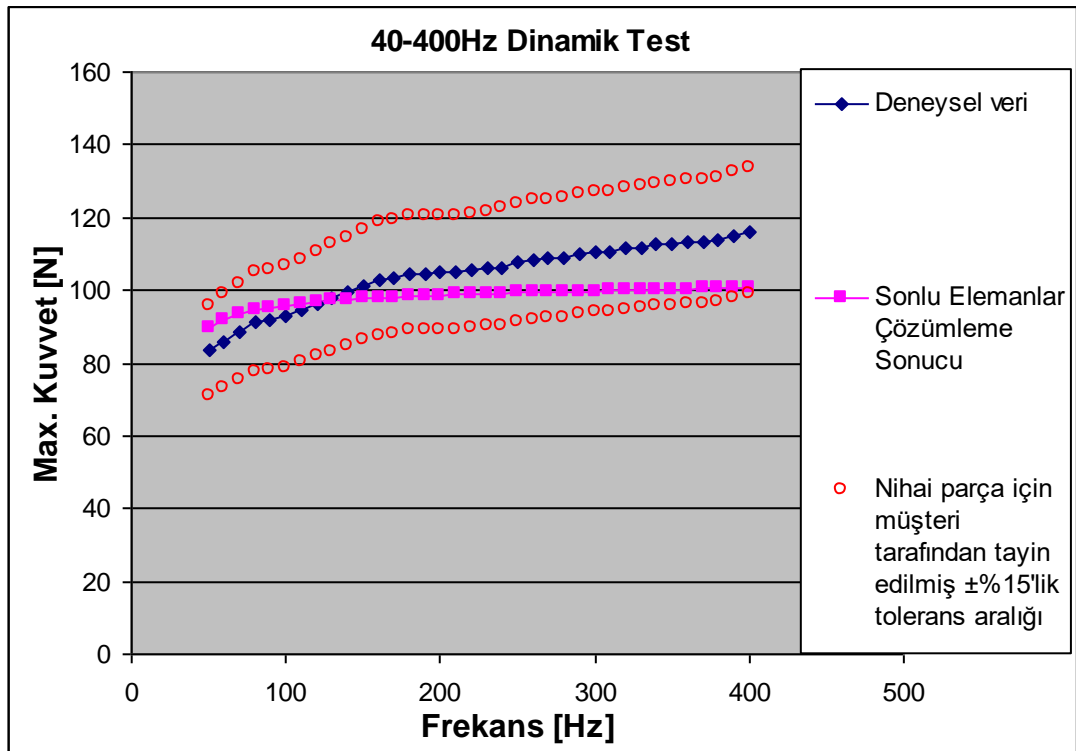
Bitmiş parça için de, disk için yapılan 1-50Hz'lik $\pm 0.2\text{mm}$ genlikteki taramayla, 40-400Hz'lik $\pm 0.05\text{mm}$ genlikteki taramanın aynısı yapılırsa, elde edilen analiz sonuçları, deney sonuçlarıyla kıyaslamalı olarak aşağıdaki ibi raporlanır.

17.2.1 1-50Hz'lik $\pm 0.2\text{mm}$ genlikteki tarama



Şekil 17.7 Bitmiş Parça 1-50Hz , deneysel veri-analiz sonucu

17.2.2 40-400Hz'lik $\pm 0.05\text{mm}$ genlikteki tarama



Şekil 17.8 Bitmiş Parça 1-50Hz , deneysel veri-analiz sonucu

SONUÇ

Bitmiş parçaya ait testlerin çözümleme sonuçlarıyla çakışması göstermiştir ki, yalnızca test plakalarından kesilmiş kauçuk deneklerden yola çıkarak, kauçuk davranış özelliklerin her biri MARC'a gerçeği temsil edecek biçimde girildiğinde , elde edilen malzeme modeli bitmiş konstrüksiyonun test sonuçlarını sağlamaktadır.

Bu sonuç, hakühazırda belirli bir konstrüksiyonun olmadığı durumlarda da, malzeme modelinin MARC'ta doğru tespitinin ardından, yazılım üzerinde güvenilir sonuçlara haiz nihai konstrüksiyonların tasarlanabileceğine işarettir. Böylelikle motorun ihtiyaç duyduğu özelliklerdeki takoz, yazılım üzerinde tasarlanıp, konstrüksiyonu istenen mekanik özellikler anlamında güvenilirlik arz eden bu tasarım için prototip kalıp bir defa imal ettirilir ve tek kalıp masrafiyla, deneme yanılmalara en aza indirerek, ihtiyaç duyulan konstrüksiyon elde edilmiş olacaktır.

KAYNAKLAR

- [1] **MSC Software** , 2003 MARC Experimental Elastomer Analysis, 2003.
- [2] **MSC Software** , 2003 MARC Advanced Course User Manual.
- [3] **Edited by D. Boast and V. A. Coveney**, 1999, Finite Element Analysis of Elastomers, Professional Engineering Publishing. NY
- [4] **Pierre Ladevèze** , 1996 Mécanique Non Linéaire Des Structures, Hermè,
- [5] **M. Riemer, J. Bauer, W. Wedig**, 1993 Mathematische Methoden Der Technischen Mechanik, Springer Verlag
- [6] **Aleksey D. Drozdov** , 1998 Mechanics of Viscoelastic Solids, John Wiley & Sons
- [7] **A.I.Borishenko and I.E.Tarapov (Richard A. Silverman)**, Vector and Tensor Analysis With Applications, 1968 , Dover Publications, Inc.
- [8] **Continuum Mechanics for Engineers**, 1998, Mase George E., Mase Thomas.G, CRC Press LLC
- [9] **Riande, Diaz-Calleja, Prolongo, Masegosa, Salom**, 2000 Polymer Viscoelasticity- Stress & Strain in Practice Marcel Dekker, Inc.
- [10] **ASTM D 412-98a** (Reapproved 2002) (Section 9.2 editorially updated in January 2003) Standart Test Methods for Vulcanized Rubber and Thermoplastic Elastomers-Tension
- [11] **ASTM D 430-95** Standart Test Methods for Rubber Deterioration –Dynamic Fatigue
- [12] **M.D.Rao, S. Gruenberg, D. Griffiths** ,1998, Measurement of Dynamic Parameters of Automotive Exhaust Hangers, 01NVC-121 Society of Automotive Engineers **217**,382-396

ÖZGEÇMİŞ

22.10.1977'de İzmir'de doğdum. İlkokulun ardından eğitim hayatımı 1988'de girdiğim İzmir Bornova Anadolu Lisesi Almanca Bölümünde devam ettirdim. 1995'de Goethe Institut'un Almanya merkez şubesinden tüm Alman üniversitelerindeki olası eğitim hakkı öncesi dil ön hazırlık muhafiyeti belgesi olan Sprachdiplom'u almaya hak kazandım ve aynı sene ÖYS Türkiye 682. si olarak İstanbul Teknik Üniversitesi Makine Fakültesi Tekstil Bölümüne girdim. İlk sene Maçka Dil Fakültesi İngilizce hazırlık sınıfından 1.'lik ödülüyle çıkmamın ardından Lisans eğitimimi 2000 yılında tamamladım ve takip eden İ.T.Ü Makina Fakültesi Yüksek Lisans dönemi mülakatlarında Konstrüksüyon, Konstrüksüyon ve İmalat Bölümlerine kabul edildim. Tercihimi konstrüksüyon bölümü yönünde kullandığım yüksek lisans eğitimim süresince Teklas Kauçuk A.Ş. 'de Proje Mühendisliğine ek olarak, yine aynı kuruluştaki İngilizce, Almanca ve Fransızca (1999-2002 seneleri arası Fransız Kültür Merkezi ve özel ders) dillerinde yazılı ve sözlü teknik tercümanlık görevimi halen devam ettirmekteyim.

EK-A

Deneysel Yolla Elde Edilmiş Birim Yerdeğiştirme-Mühendislik Gerilmesi (MPa)
Eğrilerine MARC Ttarafından Çakıştırılan Malzeme Modeli Eğrilerinin Modül
Tensör Bileşenlei ve Çakışma Sapma Oranını (Error) Gösteren İlgili MARC
Pencereleri

Tek Eksenli Çekme

%10'luk Gerinim

NEO-HOOKEAN CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS

C10	0.0675551
-----	-----------

BULK MODULUS	0
ERROR	0.234597

MOONEY<2> CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS

C10	0.0675448
C01	0

BULK MODULUS	0
ERROR	0.234605

MOONEY<3> CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS

C10	0.0648999
C01	0.000565291
C11	0.00354062

BULK MODULUS	0
ERROR	0.0223141

COMPUTE	APPLY	RESET	OK	EVALUATE
---------	-------	-------	----	----------

SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION

COEFFICIENTS

C10	0.065647
C01	0
C20	0.00212092

BULK MODULUS	0
ERROR	0.0281682

SECOND ORDER INVARIANT CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION

COEFFICIENTS

C10	0.0655545
C01	0
C11	0.00167105
C20	0.00107156

BULK MODULUS	0
ERROR	0.0242079

THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS

C10	0.065557
C01	0
C11	0.00151528
C20	0.00117691
C30	0

BULK MODULUS	0
ERROR	0.0245561

YEON CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS

C10	0.0656357
C20	0.00213761
C30	0

BULK MODULUS	0
ERROR	0.0281751

COMPUTE	APPLY	RESET	OK	EVALUATE
---------	-------	-------	----	----------

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAxIAL
 ☒ A/A0
 ☒ U/U0

☐ BIAXIAL
 ☐ t/t0
 ☐ U/U0

☐ PLANAR SHEAR
 ☐ t/t0
 ☐ U/U0

☐ SIMPLE SHEAR

☐ VOLUMETRIC

☐ USE ALL DATA

NUMBER OF TERMS: 2

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

☐ MATHEMATICAL CHECKS

☐ EXTRAPOLATION

▼ RELATIVE ERROR

ERROR LIMIT: 0.001

NUMBER OF ITERATIONS: 20

CONVERGENCE TOLERANCE: 1e-006

COMPUTE
 APPLY
 RESET
 OK

COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	0.112033	2.31699
2	4.48259e-007	0.0998059
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS: 648.95

ERROR: 0.0108552

EVALUATE

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAxIAL
 ☒ A/A0
 ☒ U/U0

☐ BIAXIAL
 ☐ t/t0
 ☐ U/U0

☐ PLANAR SHEAR
 ☐ t/t0
 ☐ U/U0

☐ SIMPLE SHEAR

☐ VOLUMETRIC

☐ USE ALL DATA

NUMBER OF TERMS: 3

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

☐ MATHEMATICAL CHECKS

☐ EXTRAPOLATION

▼ RELATIVE ERROR

ERROR LIMIT: 0.001

NUMBER OF ITERATIONS: 20

CONVERGENCE TOLERANCE: 1e-006

COMPUTE
 APPLY
 RESET
 OK

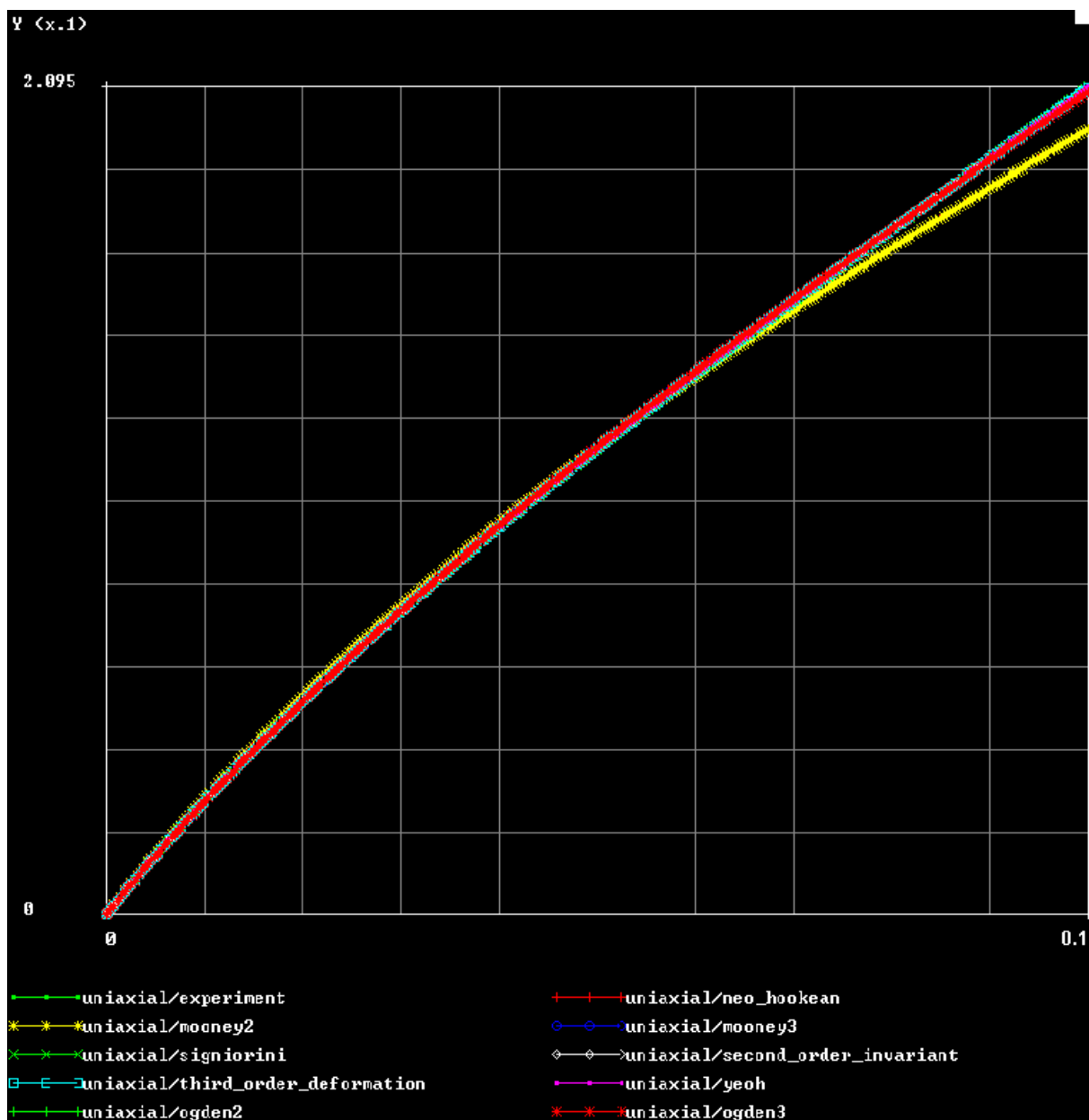
COEFFICIENTS

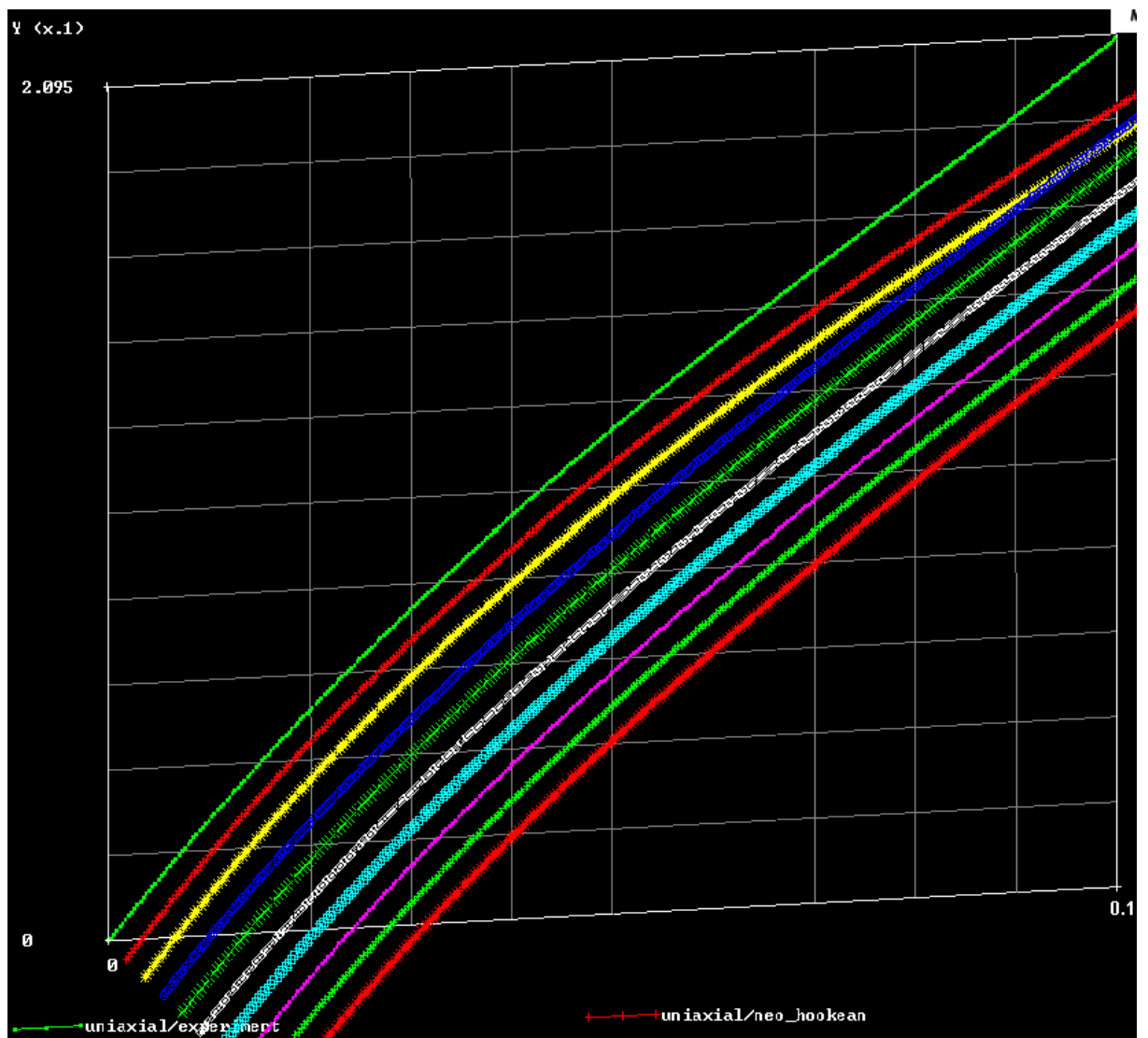
	MODULI	EXPONENTS
1	0.0621708	5.81975e-007
2	0.112032	2.31701
3	2.20813e-007	0.655451
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS: 648.948

ERROR: 0.0108552

EVALUATE





%20'lik Gerinim

NEO-HOOKEAN CONTROL PARAMETERS

☒ **UNIAXIAL**

☐ BIAXIAL

☐ PLANAR SHEAR

☐ SIMPLE SHEAR

☐ VOLUMETRIC

☐ USE ALL DATA

☒ **POSITIVE COEFFICIENTS**

☐ **EXTRAPOLATION**

☐ **RELATIVE ERROR**

COEFFICIENTS

C10 0.11461

BULK MODULUS 0

ERROR 0.266283

COMPUTE **APPLY** **RESET** **OK** **EVALUATE**

MOONEY<2> CONTROL PARAMETERS					
<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL <input type="checkbox"/> BIAXIAL <input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR <input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR <input type="checkbox"/> VOLUMETRIC <input type="checkbox"/> USE ALL DATA	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr> <td>C10</td> <td>0.114612</td> </tr> <tr> <td>C01</td> <td>0</td> </tr> </table> BULK MODULUS <input type="text" value="0"/> ERROR <input type="text" value="0.266283"/>	C10	0.114612	C01	0
C10	0.114612				
C01	0				

MOONEY<3> CONTROL PARAMETERS							
<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL <input type="checkbox"/> BIAXIAL <input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR <input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR <input type="checkbox"/> VOLUMETRIC <input type="checkbox"/> USE ALL DATA	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr> <td>C10</td> <td>0.111619</td> </tr> <tr> <td>C01</td> <td>0.000488494</td> </tr> <tr> <td>C11</td> <td>0.00337639</td> </tr> </table> BULK MODULUS <input type="text" value="0"/> ERROR <input type="text" value="0.0364848"/>	C10	0.111619	C01	0.000488494	C11	0.00337639
C10	0.111619						
C01	0.000488494						
C11	0.00337639						

SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS							
<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL <input type="checkbox"/> BIAXIAL <input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR <input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR <input type="checkbox"/> VOLUMETRIC <input type="checkbox"/> USE ALL DATA	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr> <td>C10</td> <td>0.112293</td> </tr> <tr> <td>C01</td> <td>3.04126e-005</td> </tr> <tr> <td>C20</td> <td>0.00194214</td> </tr> </table> BULK MODULUS <input type="text" value="0"/> ERROR <input type="text" value="0.0396892"/>	C10	0.112293	C01	3.04126e-005	C20	0.00194214
C10	0.112293						
C01	3.04126e-005						
C20	0.00194214						

SECOND ORDER INVARIANT CONTROL PARAMETERS									
<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL <input type="checkbox"/> BIAXIAL <input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR <input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR <input type="checkbox"/> VOLUMETRIC <input type="checkbox"/> USE ALL DATA	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr> <td>C10</td> <td>0.11009</td> </tr> <tr> <td>C01</td> <td>0.00239354</td> </tr> <tr> <td>C11</td> <td>0.00182445</td> </tr> <tr> <td>C20</td> <td>0.00115943</td> </tr> </table> BULK MODULUS <input type="text" value="0"/> ERROR <input type="text" value="0.044203"/>	C10	0.11009	C01	0.00239354	C11	0.00182445	C20	0.00115943
C10	0.11009								
C01	0.00239354								
C11	0.00182445								
C20	0.00115943								

THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS											
<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL <input type="checkbox"/> BIAXIAL <input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR <input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR <input type="checkbox"/> VOLUMETRIC <input type="checkbox"/> USE ALL DATA	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr> <td>C10</td> <td>0.101784</td> </tr> <tr> <td>C01</td> <td>0.0122905</td> </tr> <tr> <td>C11</td> <td>0.00207365</td> </tr> <tr> <td>C20</td> <td>0.00201742</td> </tr> <tr> <td>C30</td> <td>1.99311e-005</td> </tr> </table> BULK MODULUS <input type="text" value="0"/> ERROR <input type="text" value="0.0931442"/>	C10	0.101784	C01	0.0122905	C11	0.00207365	C20	0.00201742	C30	1.99311e-005
C10	0.101784										
C01	0.0122905										
C11	0.00207365										
C20	0.00201742										
C30	1.99311e-005										

<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS <input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION <input type="checkbox"/> RELATIVE ERROR	COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE
--	---

YEOH CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA
☒ POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS
 C10 0.112196
 C20 0.00194583
 C30 0

BULK MODULUS 0
 ERROR 0.0405337

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAXIAL $\blacktriangle A/A0$ $\blacktriangle U/U0$
☐ BIAXIAL $\blacktriangle t/t0$ $\blacktriangle U/U0$
☐ PLANAR SHEAR $\blacktriangle t/t0$ $\blacktriangle U/U0$
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

NUMBER OF TERMS 2
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION
 ▼ RELATIVE ERROR
 ERROR LIMIT 0.001
 NUMBER OF ITERATIONS 20
 CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	0.203825	2.18763
2	1.16997e-007	0.825236
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS 1114.73
 ERROR 0.0271374

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAXIAL $\blacktriangle A/A0$ $\blacktriangle U/U0$
☐ BIAXIAL $\blacktriangle t/t0$ $\blacktriangle U/U0$
☐ PLANAR SHEAR $\blacktriangle t/t0$ $\blacktriangle U/U0$
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

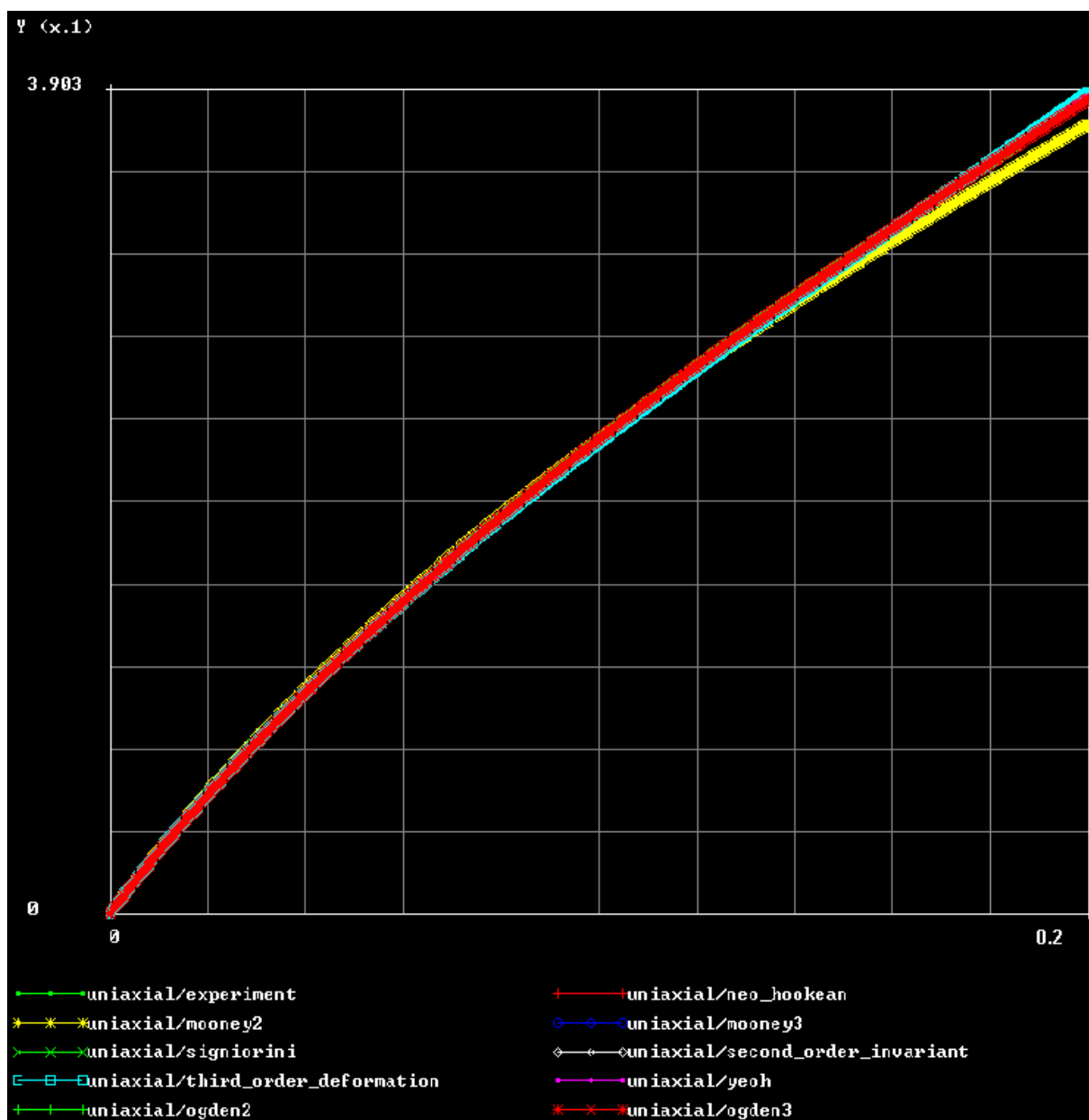
NUMBER OF TERMS 3
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION
 ▼ RELATIVE ERROR
 ERROR LIMIT 0.001
 NUMBER OF ITERATIONS 20
 CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

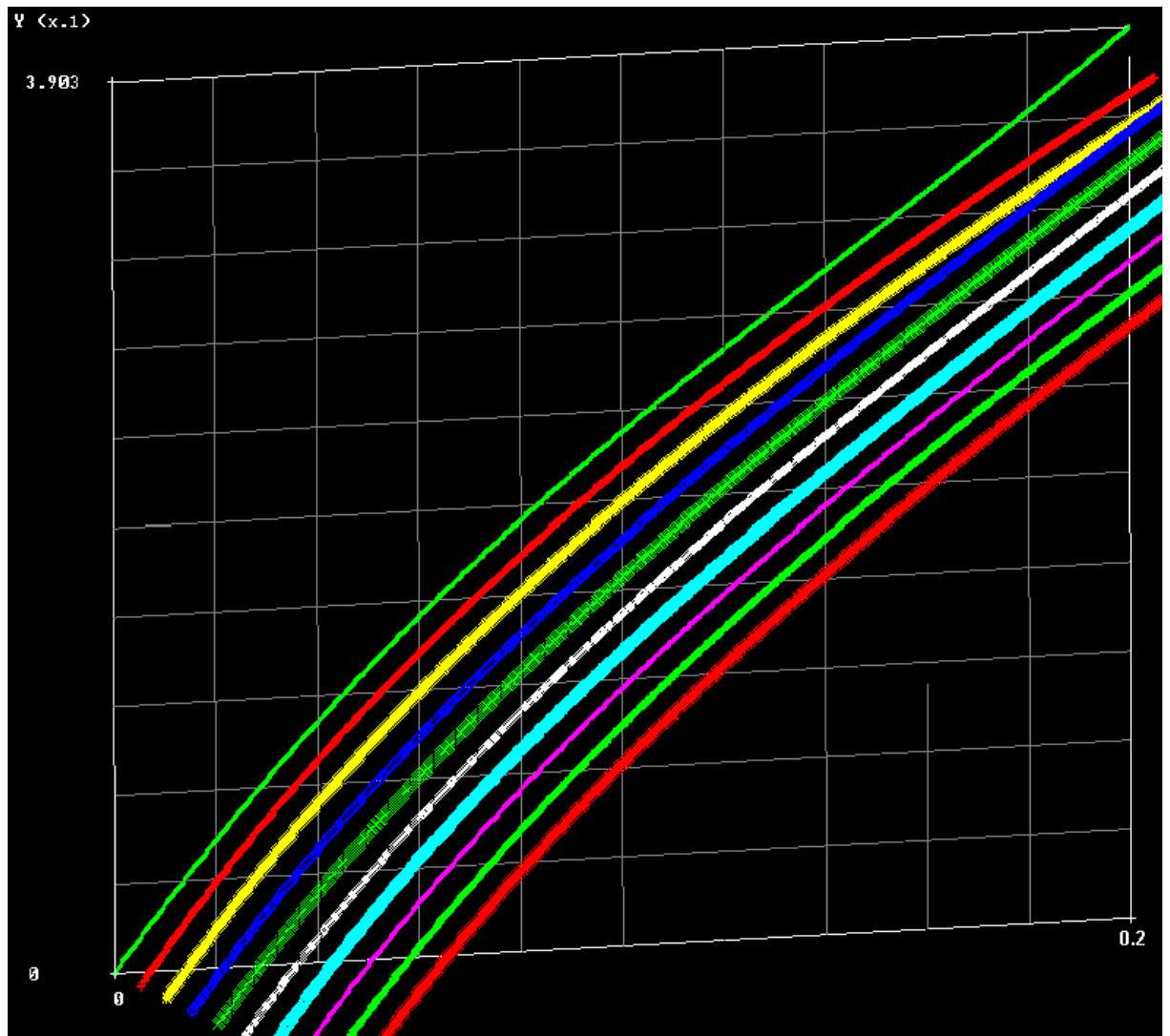
COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	0.0537547	2.65025e-006
2	0.203816	2.1877
3	0.739816	5.76506e-008
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS 1114.72
 ERROR 0.0271375

COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE





%30'luk Gerinim

NEO-HOOKEAN CONTROL PARAMETERS

☒ **UNIAXIAL**
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ **POSITIVE COEFFICIENTS**
☐ EXTRAPOLATION

☒ **RELATIVE ERROR**

COEFFICIENTS
 C10 0.158289
 BULK MODULUS 0
 ERROR 0.602277

COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE

MOONEY<2> CONTROL PARAMETERS

<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS C10 0.158307 C01 0
<input type="checkbox"/> BIAxIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0 ERROR 0.602285

MOONEY<3> CONTROL PARAMETERS

<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS C10 0.0542266 C01 0.114878 C11 0.028504
<input type="checkbox"/> BIAxIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0 ERROR 0.00809155
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	

SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS

<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS C10 0.0801603 C01 0.0872633 C20 0.0136317
<input type="checkbox"/> BIAxIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0 ERROR 0.0209786
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	

SECOND ORDER INVARIANT CONTROL PARAMETERS

<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS C10 0.0254006 C01 0.14766 C11 0.035482 C20 0
<input type="checkbox"/> BIAxIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0

THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS

<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS C10 0.0828118 C01 0.0851051 C11 0.000838415 C20 0.0109607 C30 0.000778281
<input type="checkbox"/> BIAxIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION	BULK MODULUS 0 ERROR 0.0353699
<input type="checkbox"/> RELATIVE ERROR	

YEOH CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAXIAL
☐ BIAxIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

COEFFICIENTS

C10	0.155534
C20	0
C30	0.00160904

BULK MODULUS

0

ERROR

0.312262

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAxIAL
☐ BIAxIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ A/A0
☐ t/t0
☐ t/t0
☐ t/t0

☒ U/U0
☐ U/U0
☐ U/U0
☐ U/U0

NUMBER OF TERMS

2

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

☐ MATHEMATICAL CHECKS

☐ EXTRAPOLATION

RELATIVE ERROR

ERROR LIMIT

0.001

NUMBER OF ITERATIONS

20

CONVERGENCE TOLERANCE

1e-006

COMPUTE

APPLY

RESET

OK

COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	0.0188129	5.18763
2	42.2702	0.0132445
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS

1643.6

ERROR

0.0586053

EVALUATE

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAxIAL
☐ BIAxIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ A/A0
☐ t/t0
☐ t/t0
☐ t/t0

☒ U/U0
☐ U/U0
☐ U/U0
☐ U/U0

NUMBER OF TERMS

3

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

☐ MATHEMATICAL CHECKS

☐ EXTRAPOLATION

RELATIVE ERROR

ERROR LIMIT

0.001

NUMBER OF ITERATIONS

20

CONVERGENCE TOLERANCE

1e-006

COMPUTE

APPLY

RESET

OK

COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	2.77669e-007	2.38247
2	3.96185	0.143604
3	0.0164209	5.33619
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS

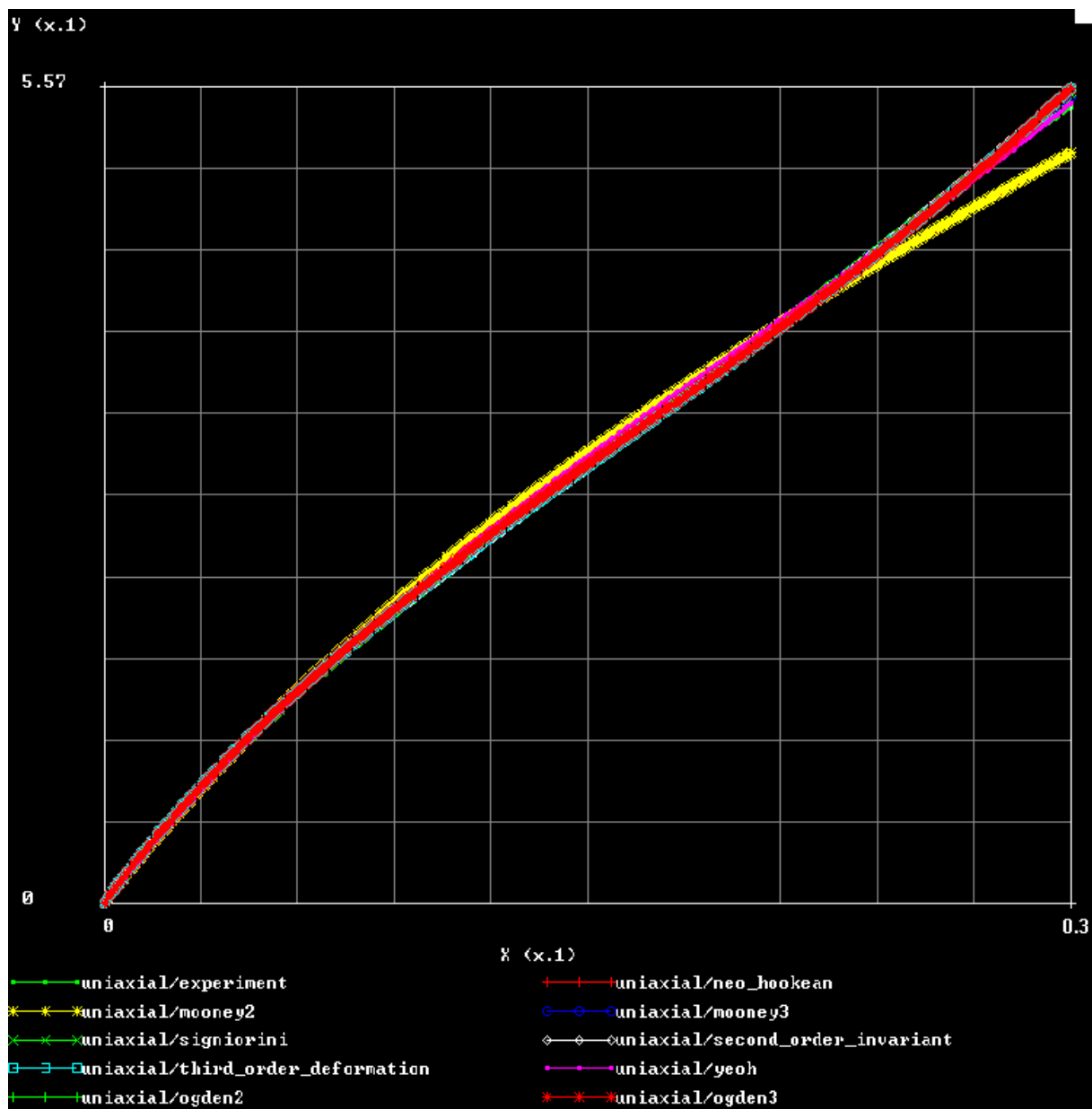
1641.41

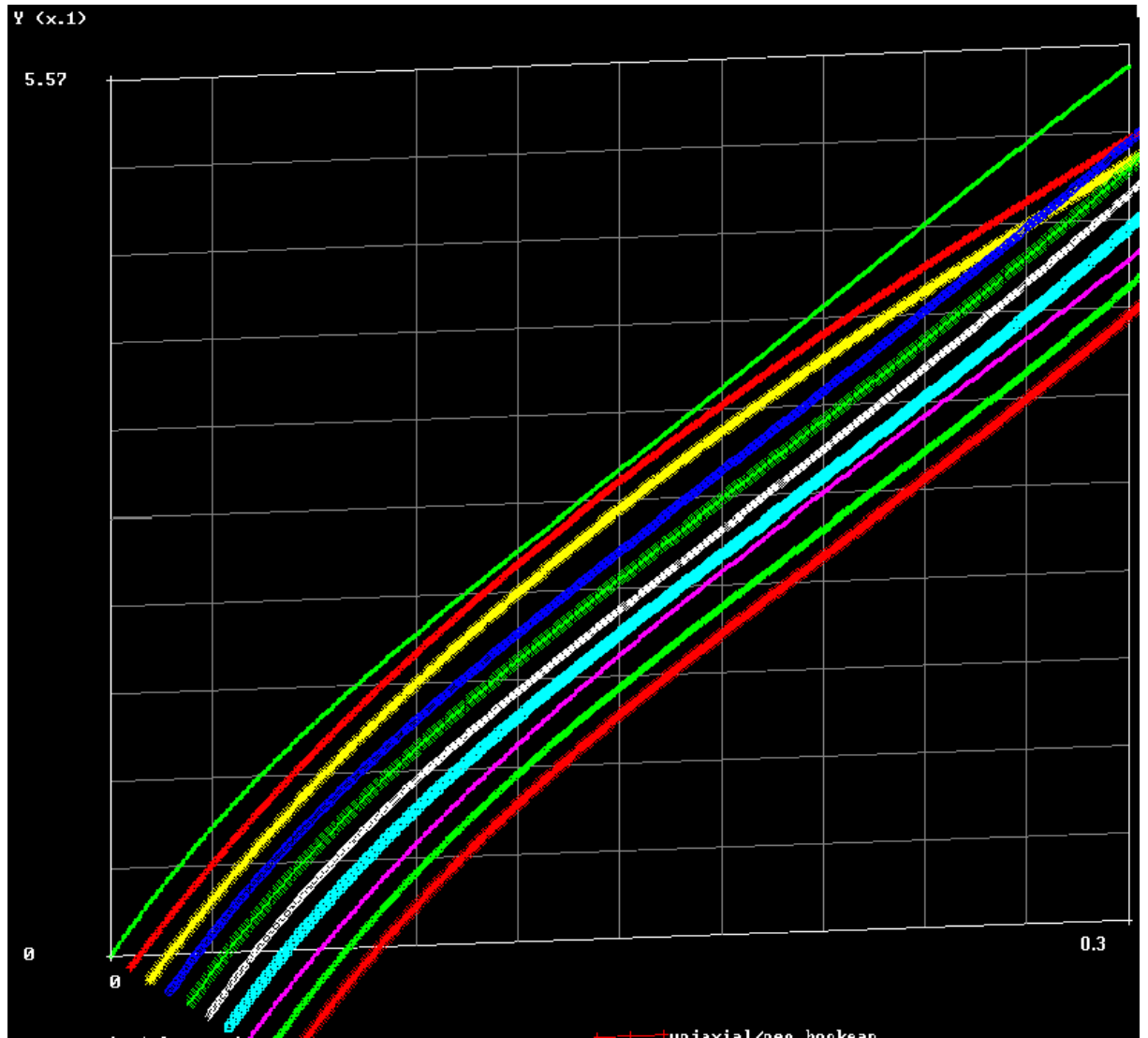
ERROR

0.0626546

EVALUATE

246





%40'lık Gerinim

NEO-HOOKEAN CONTROL PARAMETERS

☒ **UNIAXIAL**

☐ BIAXIAL

☐ PLANAR SHEAR

☐ SIMPLE SHEAR

☐ VOLUMETRIC

☐ USE ALL DATA

☒ **POSITIVE COEFFICIENTS**

☐ EXTRAPOLATION

☐ **RELATIVE ERROR**

COEFFICIENTS

C10 0.197664

BULK MODULUS 0

ERROR 0.965311

COMPUTE **APPLY** **RESET** **OK** **EVALUATE**

MOONEY<2> CONTROL PARAMETERS					
<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL <input type="checkbox"/> BIAXIAL <input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR <input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR <input type="checkbox"/> VOLUMETRIC <input type="checkbox"/> USE ALL DATA	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr> <td>C10</td> <td>0.190428</td> </tr> <tr> <td>C01</td> <td>0.0102112</td> </tr> </table> BULK MODULUS 0 ERROR 0.929804	C10	0.190428	C01	0.0102112
C10	0.190428				
C01	0.0102112				

MOONEY<3> CONTROL PARAMETERS							
<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL <input type="checkbox"/> BIAXIAL <input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR <input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR <input type="checkbox"/> VOLUMETRIC <input type="checkbox"/> USE ALL DATA	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr> <td>C10</td> <td>0.0768308</td> </tr> <tr> <td>C01</td> <td>0.137984</td> </tr> <tr> <td>C11</td> <td>0.0286526</td> </tr> </table> BULK MODULUS 0 ERROR 0.41224	C10	0.0768308	C01	0.137984	C11	0.0286526
C10	0.0768308						
C01	0.137984						
C11	0.0286526						

SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS							
<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL <input type="checkbox"/> BIAXIAL <input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR <input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR <input type="checkbox"/> VOLUMETRIC <input type="checkbox"/> USE ALL DATA	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr> <td>C10</td> <td>0.110833</td> </tr> <tr> <td>C01</td> <td>0.101152</td> </tr> <tr> <td>C20</td> <td>0.0124386</td> </tr> </table> BULK MODULUS 0 ERROR 0.502167	C10	0.110833	C01	0.101152	C20	0.0124386
C10	0.110833						
C01	0.101152						
C20	0.0124386						

SECOND ORDER INVARIANT CONTROL PARAMETERS									
<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL <input type="checkbox"/> BIAXIAL <input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR <input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR <input type="checkbox"/> VOLUMETRIC <input type="checkbox"/> USE ALL DATA	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr> <td>C10</td> <td>0.0453674</td> </tr> <tr> <td>C01</td> <td>0.174965</td> </tr> <tr> <td>C11</td> <td>0.0267619</td> </tr> <tr> <td>C20</td> <td>0.0054901</td> </tr> </table> BULK MODULUS 0 ERROR 0.51598	C10	0.0453674	C01	0.174965	C11	0.0267619	C20	0.0054901
C10	0.0453674								
C01	0.174965								
C11	0.0267619								
C20	0.0054901								

THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS											
<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL <input type="checkbox"/> BIAXIAL <input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR <input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR <input type="checkbox"/> VOLUMETRIC <input type="checkbox"/> USE ALL DATA	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr> <td>C10</td> <td>0.0707389</td> </tr> <tr> <td>C01</td> <td>0.147066</td> </tr> <tr> <td>C11</td> <td>0.00907468</td> </tr> <tr> <td>C20</td> <td>0.0125961</td> </tr> <tr> <td>C30</td> <td>0</td> </tr> </table> BULK MODULUS 0 ERROR 0.533009	C10	0.0707389	C01	0.147066	C11	0.00907468	C20	0.0125961	C30	0
C10	0.0707389										
C01	0.147066										
C11	0.00907468										
C20	0.0125961										
C30	0										

☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☒ RELATIVE ERROR

COMPUTE

APPLY

RESET

OK

EVALUATE

YEOH CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAXIAL
☐ BIAxIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS

C10	0.197046
C20	0
C30	0.000343217

BULK MODULUS 0
 ERROR 0.950995

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAxIAL
☐ BIAxIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ A/A0
☒ U/U0
☐ t/t0
☐ U/U0
☐ t/t0
☐ U/U0

NUMBER OF TERMS 2
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION
 ▼ RELATIVE ERROR
 ERROR LIMIT 0.001
 NUMBER OF ITERATIONS 20
 CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	38.2226	0.0170733
2	0.0412305	4.27331
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS 2071.94
 ERROR 0.61183

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAxIAL
☐ BIAxIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ A/A0
☒ U/U0
☐ t/t0
☐ U/U0
☐ t/t0
☐ U/U0

NUMBER OF TERMS 3
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION
 ▼ RELATIVE ERROR
 ERROR LIMIT 0.001
 NUMBER OF ITERATIONS 20
 CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

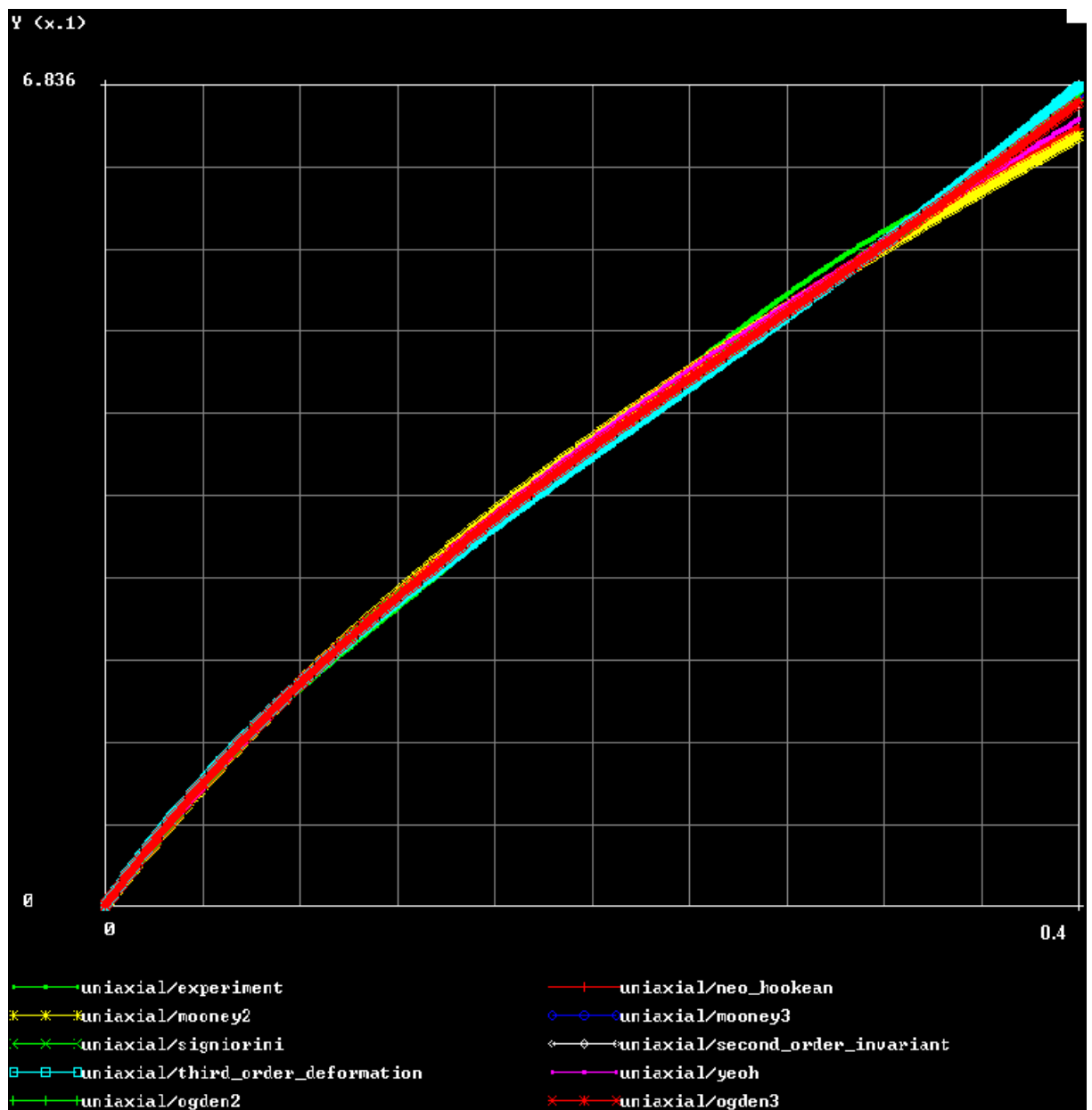
COEFFICIENTS

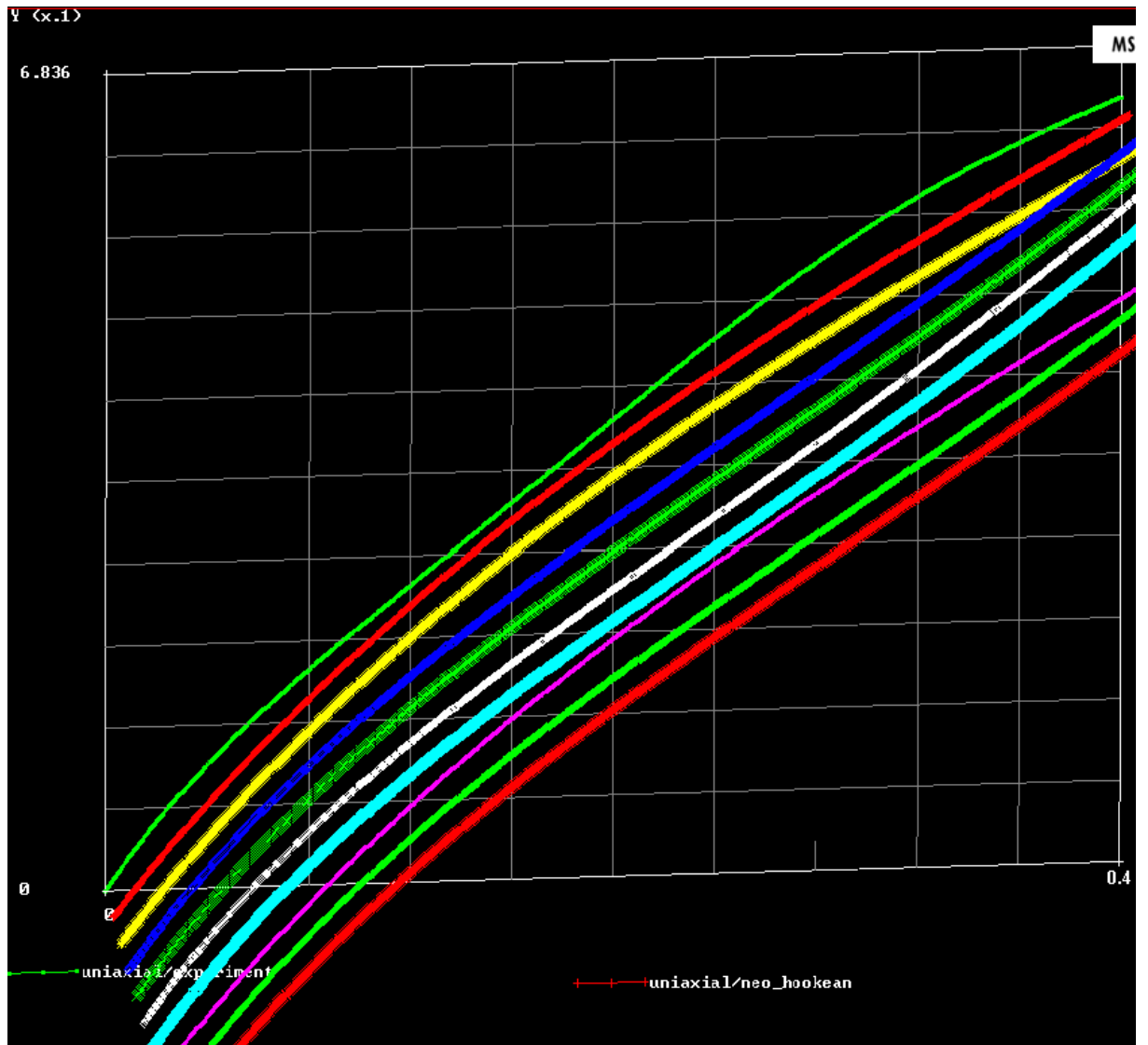
	MODULI	EXPONENTS
1	0.0409491	4.25467
2	2.0964	0.158745
3	5.12879	0.0623466
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS 2066.95
 ERROR 0.61939

COMPUTE APPLY RESET OK

EVALUATE





%50'lik Gerinim

NEO-HOOKEAN CONTROL PARAMETERS

<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL <input type="checkbox"/> BIAXIAL <input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR <input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR <input type="checkbox"/> VOLUMETRIC <input type="checkbox"/> USE ALL DATA		COEFFICIENTS C10 0.210149
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS <input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION		BULK MODULUS 0
<input checked="" type="checkbox"/> RELATIVE ERROR		ERROR 0.547106
COMPUTE	APPLY	EVALUATE

Buttons: RESET, OK

MOONEY<2> CONTROL PARAMETERS					
<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL <input type="checkbox"/> BIAxIAL <input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR <input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR <input type="checkbox"/> VOLUMETRIC <input type="checkbox"/> USE ALL DATA	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr> <td>C10</td> <td>0.199628</td> </tr> <tr> <td>C01</td> <td>0.0147106</td> </tr> </table> BULK MODULUS <input type="text" value="0"/> ERROR <input type="text" value="0.492339"/>	C10	0.199628	C01	0.0147106
C10	0.199628				
C01	0.0147106				

MOONEY<3> CONTROL PARAMETERS							
<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL <input type="checkbox"/> BIAxIAL <input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR <input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR <input type="checkbox"/> VOLUMETRIC <input type="checkbox"/> USE ALL DATA <input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr> <td>C10</td> <td>0.197088</td> </tr> <tr> <td>C01</td> <td>0.0175477</td> </tr> <tr> <td>C11</td> <td>0.00066191</td> </tr> </table> BULK MODULUS <input type="text" value="0"/> ERROR <input type="text" value="0.49216"/>	C10	0.197088	C01	0.0175477	C11	0.00066191
C10	0.197088						
C01	0.0175477						
C11	0.00066191						

SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS							
<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL <input type="checkbox"/> BIAxIAL <input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR <input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR <input type="checkbox"/> VOLUMETRIC <input type="checkbox"/> USE ALL DATA <input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr> <td>C10</td> <td>0.200238</td> </tr> <tr> <td>C01</td> <td>0.0138806</td> </tr> <tr> <td>C20</td> <td>0</td> </tr> </table> BULK MODULUS <input type="text" value="0"/> ERROR <input type="text" value="0.492517"/>	C10	0.200238	C01	0.0138806	C20	0
C10	0.200238						
C01	0.0138806						
C20	0						

SECOND ORDER INVARIANT CONTROL PARAMETERS									
<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL <input type="checkbox"/> BIAxIAL <input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR <input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR <input type="checkbox"/> VOLUMETRIC <input type="checkbox"/> USE ALL DATA <input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS <input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr> <td>C10</td> <td>0.0805628</td> </tr> <tr> <td>C01</td> <td>0.149614</td> </tr> <tr> <td>C11</td> <td>0.0291613</td> </tr> <tr> <td>C20</td> <td>0</td> </tr> </table> BULK MODULUS <input type="text" value="0"/> ERROR <input type="text" value="0.848493"/>	C10	0.0805628	C01	0.149614	C11	0.0291613	C20	0
C10	0.0805628								
C01	0.149614								
C11	0.0291613								
C20	0								

THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS											
<input checked="" type="checkbox"/> UNIAXIAL <input type="checkbox"/> BIAxIAL <input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR <input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR <input type="checkbox"/> VOLUMETRIC <input type="checkbox"/> USE ALL DATA <input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS <input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION <input checked="" type="checkbox"/> RELATIVE ERROR	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr> <td>C10</td> <td>0.203541</td> </tr> <tr> <td>C01</td> <td>0.00925921</td> </tr> <tr> <td>C11</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>C20</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>C30</td> <td>0</td> </tr> </table> BULK MODULUS <input type="text" value="0"/> ERROR <input type="text" value="0.499863"/>	C10	0.203541	C01	0.00925921	C11	0	C20	0	C30	0
C10	0.203541										
C01	0.00925921										
C11	0										
C20	0										
C30	0										

YEOM CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAxIAL
 ☐ BIAXIAL
 ☐ PLANAR SHEAR
 ☐ SIMPLE SHEAR
 ☐ VOLUMETRIC
 ☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS
 C10 0.210155
 C20 0
 C30 0

BULK MODULUS 0
 ERROR 0.547106

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAxIAL
 ☐ BIAXIAL
 ☐ PLANAR SHEAR
 ☐ SIMPLE SHEAR
 ☐ VOLUMETRIC
 ☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

☐ MATHEMATICAL CHECKS

☐ EXTRAPOLATION

NUMBER OF TERMS 2

☒ RELATIVE ERROR

ERROR LIMIT 0.001

NUMBER OF ITERATIONS 20

CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	1.94455	0.0368046
2	0.391466	2.00061
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS 2136.85
 ERROR 0.494481

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☒ UNIAxIAL
 ☐ BIAXIAL
 ☐ PLANAR SHEAR
 ☐ SIMPLE SHEAR
 ☐ VOLUMETRIC
 ☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

☐ MATHEMATICAL CHECKS

☐ EXTRAPOLATION

NUMBER OF TERMS 3

☒ RELATIVE ERROR

ERROR LIMIT 0.001

NUMBER OF ITERATIONS 20

CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

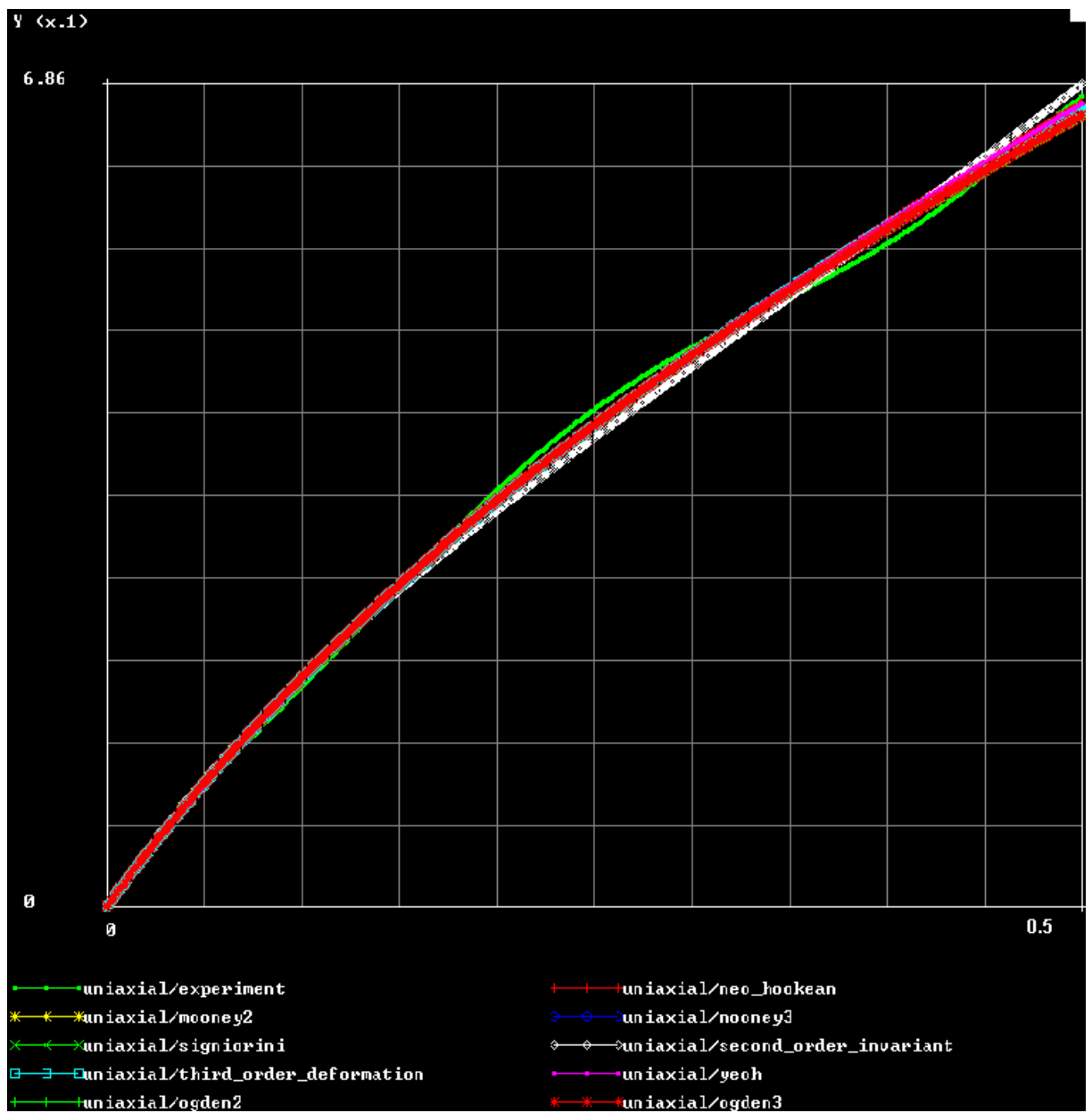
COEFFICIENTS

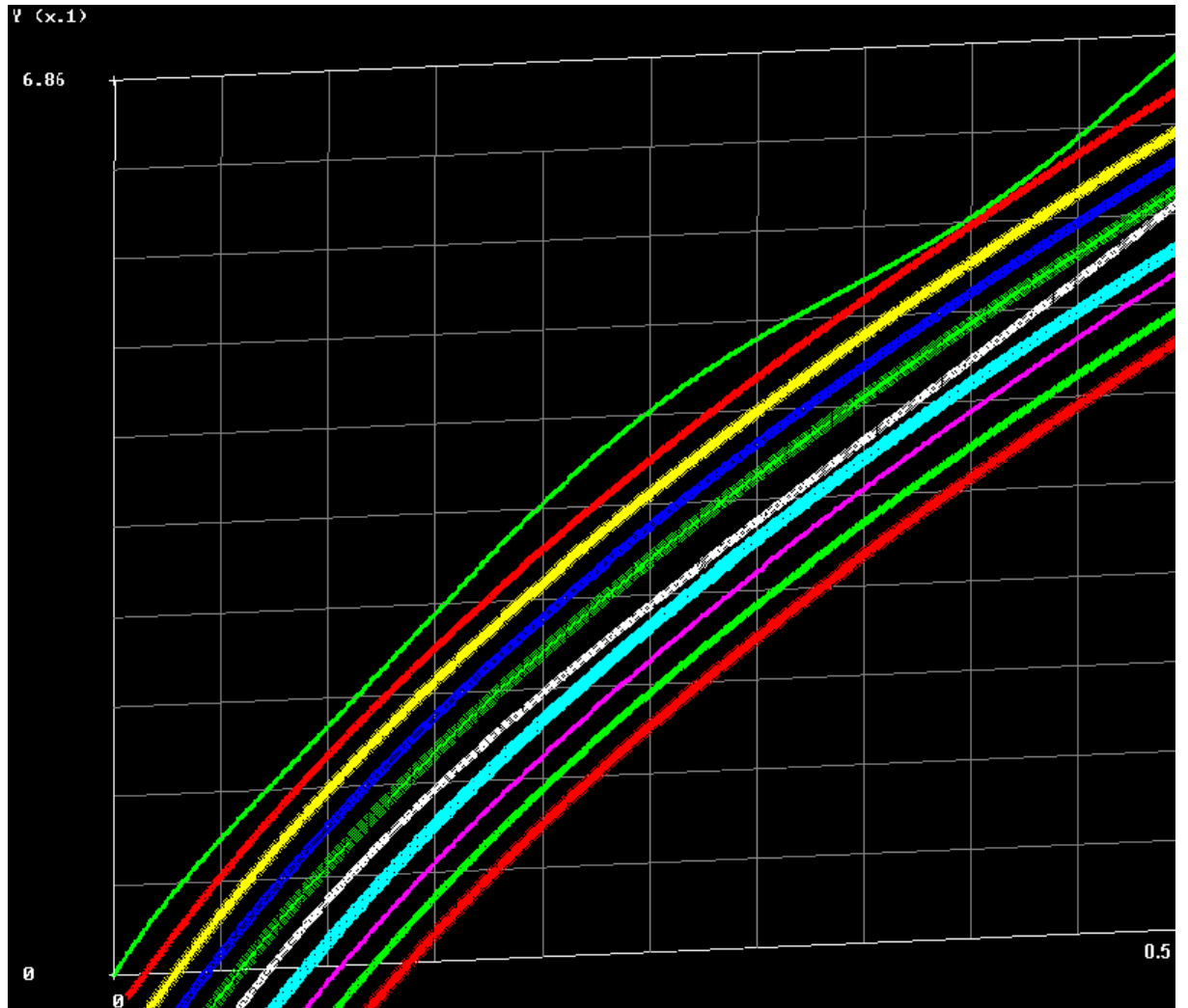
	MODULI	EXPONENTS
1	0.493004	0.0484041
2	0.39024	2.00262
3	0.784389	0.0629514
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS 2136.87
 ERROR 0.494493

COMPUTE APPLY RESET OK

EVALUATE





İki Eksenli Çekme

%10'luk Gerinim

SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS
<input checked="" type="checkbox"/> BIAXIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	C10 0.0136613 C01 0.0156625 C20 0.000117908
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 0.00129117
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION	
<input checked="" type="checkbox"/> RELATIVE ERROR	

SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS

C10 0.0136613
C01 0.0156625
C20 0.000117908

BULK MODULUS 0

ERROR 0.00129117

SECOND ORDER INVARIANT CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS

C10 0.0157662
C01 0.0138946
C11 0
C20 0.000642173

BULK MODULUS 0

ERROR 0.00296476

THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

☒ EXTRAPOLATION

COEFFICIENTS

C10 0.0172129
C01 0.00629296
C11 0.000207555
C20 0.00379253
C30 0

BULK MODULUS 0

ERROR 3.45116

YEONH CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

☐ EXTRAPOLATION

☒ RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS

C10 0.0321564
C20 0.00478111
C30 0

BULK MODULUS 0

ERROR 0.131517

COMPUTE
APPLY
RESET
OK

EVALUATE

OGDEN CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	λ / λ_0	μ / μ_0
<input checked="" type="checkbox"/> BIAxIAL	ϵ / ϵ_0	ν / ν_0
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	ϵ / ϵ_0	ν / ν_0
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR		
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC		
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA		

NUMBER OF TERMS: 2
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION

▼ RELATIVE ERROR
 ERROR LIMIT: 0.001
 NUMBER OF ITERATIONS: 20
 CONVERGENCE TOLERANCE: 1e-006

COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	42.3961	0.00395141
2	0.0166903	5.91228
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS: 665.505
 ERROR: 0.356605

OGDEN CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	λ / λ_0	μ / μ_0
<input checked="" type="checkbox"/> BIAxIAL	ϵ / ϵ_0	ν / ν_0
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	ϵ / ϵ_0	ν / ν_0
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR		
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC		
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA		

NUMBER OF TERMS: 3
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION

▼ RELATIVE ERROR
 ERROR LIMIT: 0.001
 NUMBER OF ITERATIONS: 20
 CONVERGENCE TOLERANCE: 1e-006

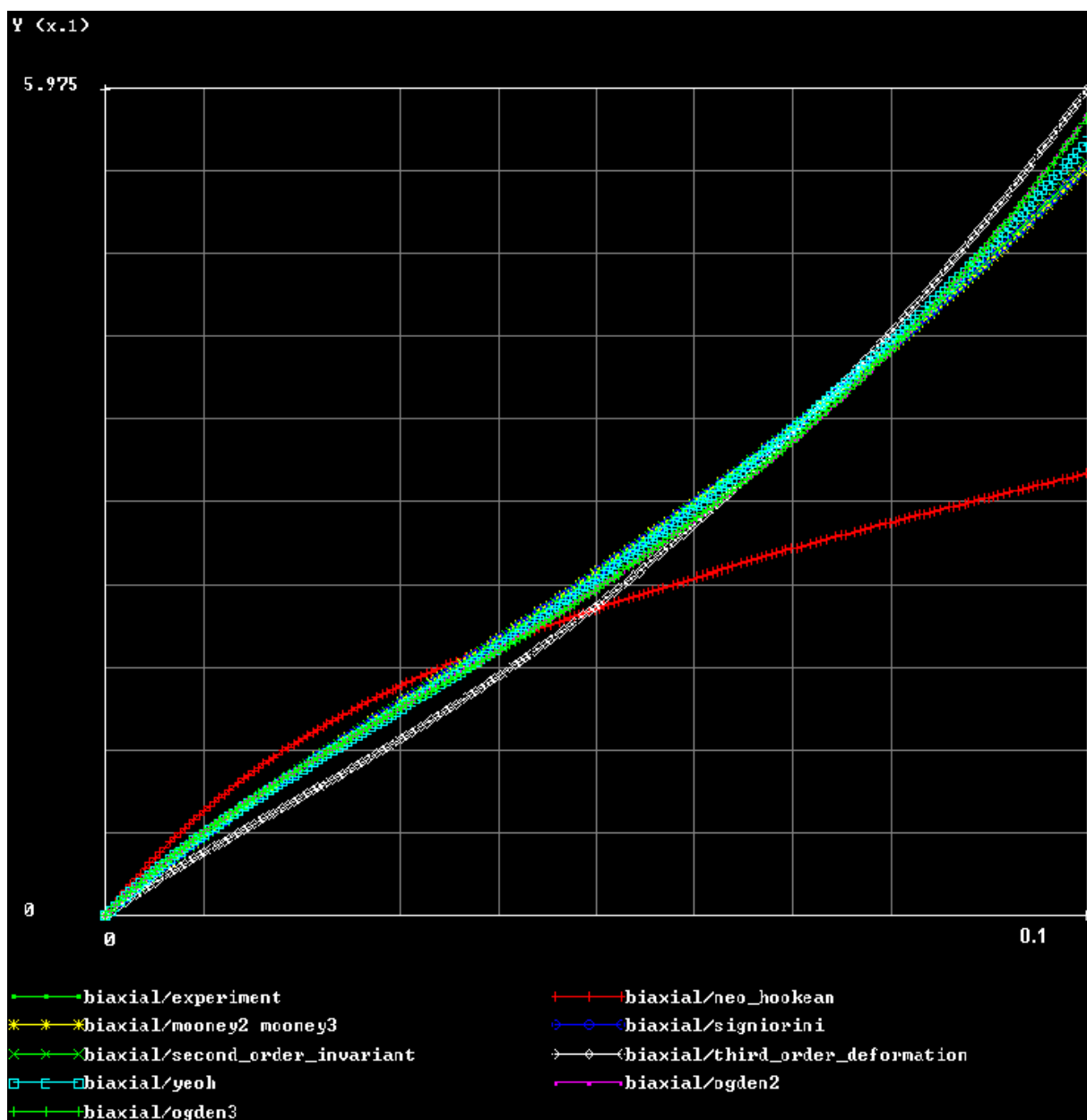
COEFFICIENTS

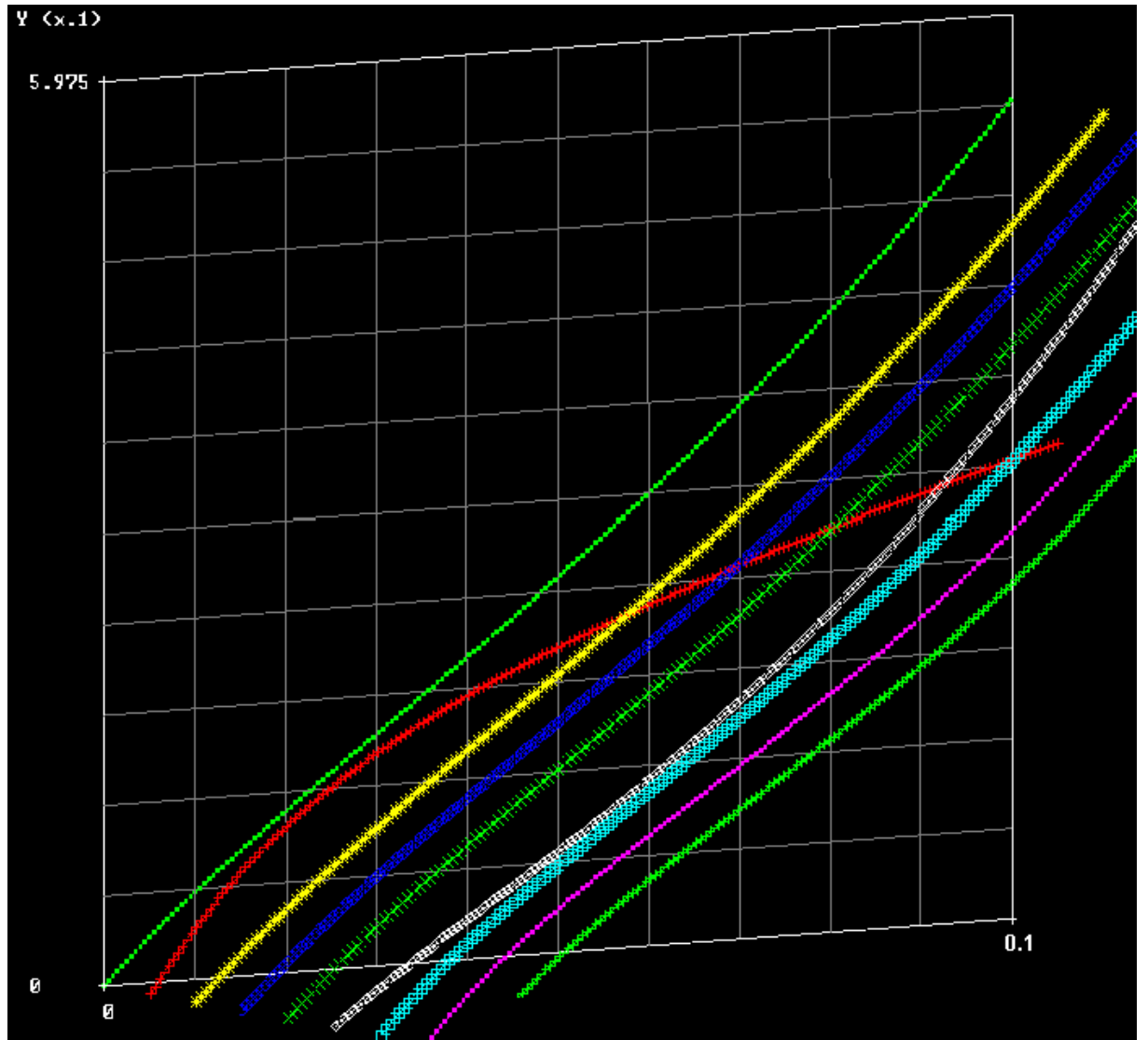
	MODULI	EXPONENTS
1	0.0195123	5.71251
2	4.90159	0.0270183
3	2.02236	0.0119662
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS: 670.242
 ERROR: 0.367454

COMPUTE
 APPLY
 RESET
 OK

EVALUATE





%20'lik Gerinim

NEO-HOOKEAN CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS
<input checked="" type="checkbox"/> BIAXIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	<input type="text" value="C10"/> <input type="text" value="0.0663259"/>
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	<input type="text" value="BULK MODULUS"/> <input type="text" value="0"/>
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION	<input type="text" value="ERROR"/> <input type="text" value="6.99183"/>
<input checked="" type="checkbox"/> RELATIVE ERROR	

COMPUTE	APPLY	RESET	OK	EVALUATE
---------	-------	-------	----	----------

MOONEY(3) CONTROL PARAMETERS

☐UNIAXIAL
☒BIAXIAL
☐PLANAR SHEAR
☐SIMPLE SHEAR
☐VOLUMETRIC
☐USE ALL DATA

☒POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS

C100.0343097

C010.0162612

C110.000141037

BULK MODULUS0

ERROR0.00747318

SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS

☐UNIAXIAL
☒BIAXIAL
☐PLANAR SHEAR
☐SIMPLE SHEAR
☐VOLUMETRIC
☐USE ALL DATA

☒POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS

C100.0390198

C010.0121573

C200.00160542

BULK MODULUS0

ERROR0.00376004

SECOND ORDER INVARIANT CONTROL PARAMETERS

☐UNIAXIAL
☒BIAXIAL
☐PLANAR SHEAR
☐SIMPLE SHEAR
☐VOLUMETRIC
☐USE ALL DATA

☒POSITIVE COEFFICIENTS
☐EXTRAPOLATION

COEFFICIENTS

C100.04613

C010.00624317

C110

C200.00333826

BULK MODULUS0

ERROR0.0111785

THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS

☐UNIAXIAL
☒BIAXIAL
☐PLANAR SHEAR
☐SIMPLE SHEAR
☐VOLUMETRIC
☐USE ALL DATA

☒POSITIVE COEFFICIENTS
☐EXTRAPOLATION
☒RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS

C100.0400244

C010.00464723

C110.00110594

C200.00240096

C300

BULK MODULUS0

ERROR2.04773

COMPUTEAPPLYRESETOK

EVALUATE

VEOH CONTROL PARAMETERS

☐UNIAXIAL
☒BIAXIAL
☐PLANAR SHEAR
☐SIMPLE SHEAR
☐VOLUMETRIC
☐USE ALL DATA
☒POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS

C10	0.0534557
C20	0.00520533
C30	0

BULK MODULUS

0

ERROR

0.0349908

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☐UNIAXIAL
☒BIAXIAL
☐PLANAR SHEAR
☐SIMPLE SHEAR
☐VOLUMETRIC
☐USE ALL DATA

A/A0

U/U0

t/t0

U/U0

t/t0

U/U0

NUMBER OF TERMS

2

☒POSITIVE COEFFICIENTS
☐MATHEMATICAL CHECKS
☐EXTRAPOLATION

RELATIVE ERROR

ERROR LIMIT

0.001

NUMBER OF ITERATIONS

20

CONVERGENCE TOLERANCE

1e-006

COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	33.7839	0.0082917
2	0.0271008	5.38704
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS

1065.3

ERROR

0.0518832

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☐UNIAXIAL
☒BIAXIAL
☐PLANAR SHEAR
☐SIMPLE SHEAR
☐VOLUMETRIC
☐USE ALL DATA

A/A0

U/U0

t/t0

U/U0

t/t0

U/U0

NUMBER OF TERMS

3

☒POSITIVE COEFFICIENTS
☐MATHEMATICAL CHECKS
☐EXTRAPOLATION

RELATIVE ERROR

ERROR LIMIT

0.001

NUMBER OF ITERATIONS

20

CONVERGENCE TOLERANCE

1e-006

COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	0.028001	5.35008
2	13.3719	0.00795633
3	5.99924	0.0284678
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS

1067.46

ERROR

0.053655

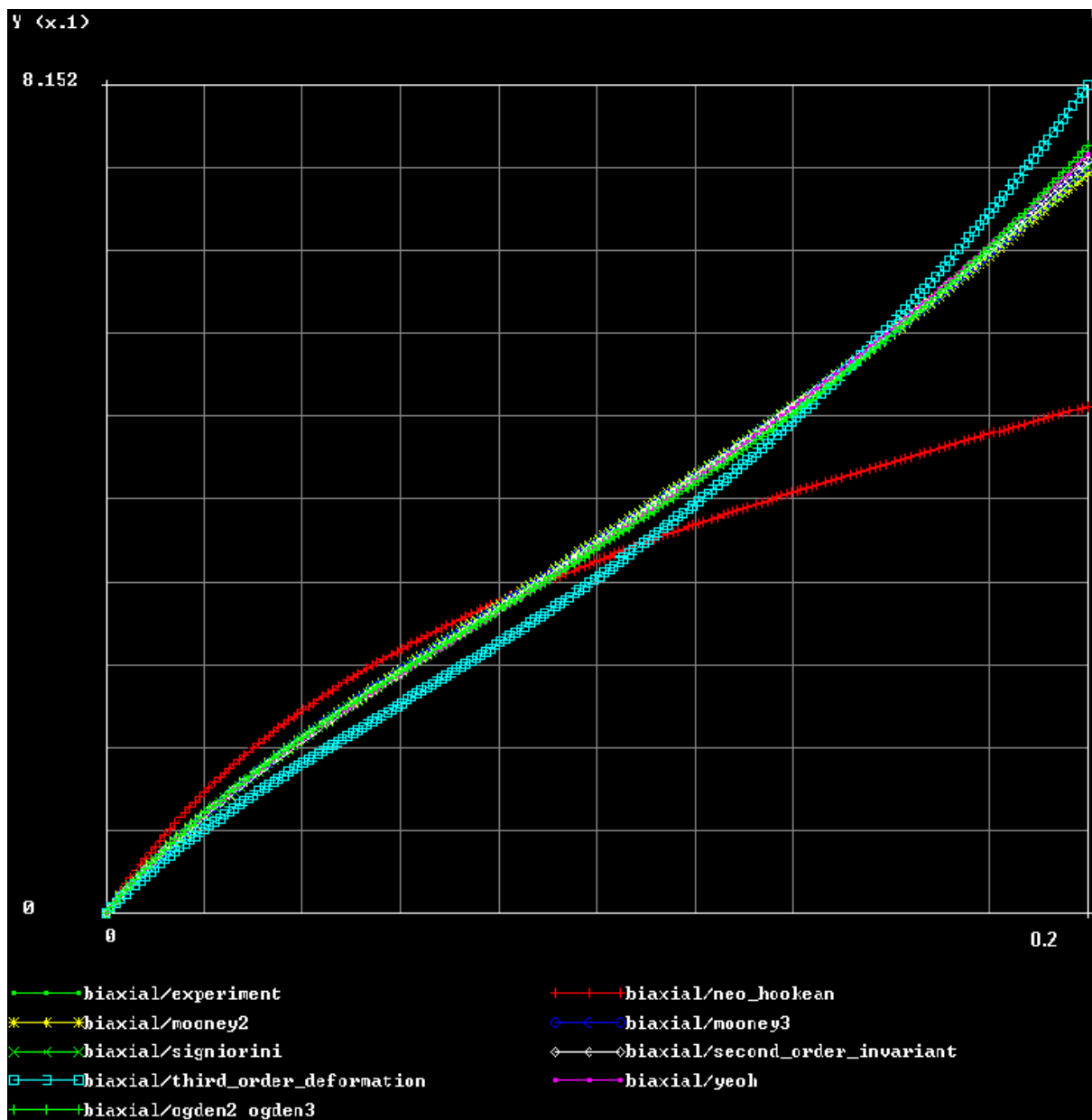
COMPUTE

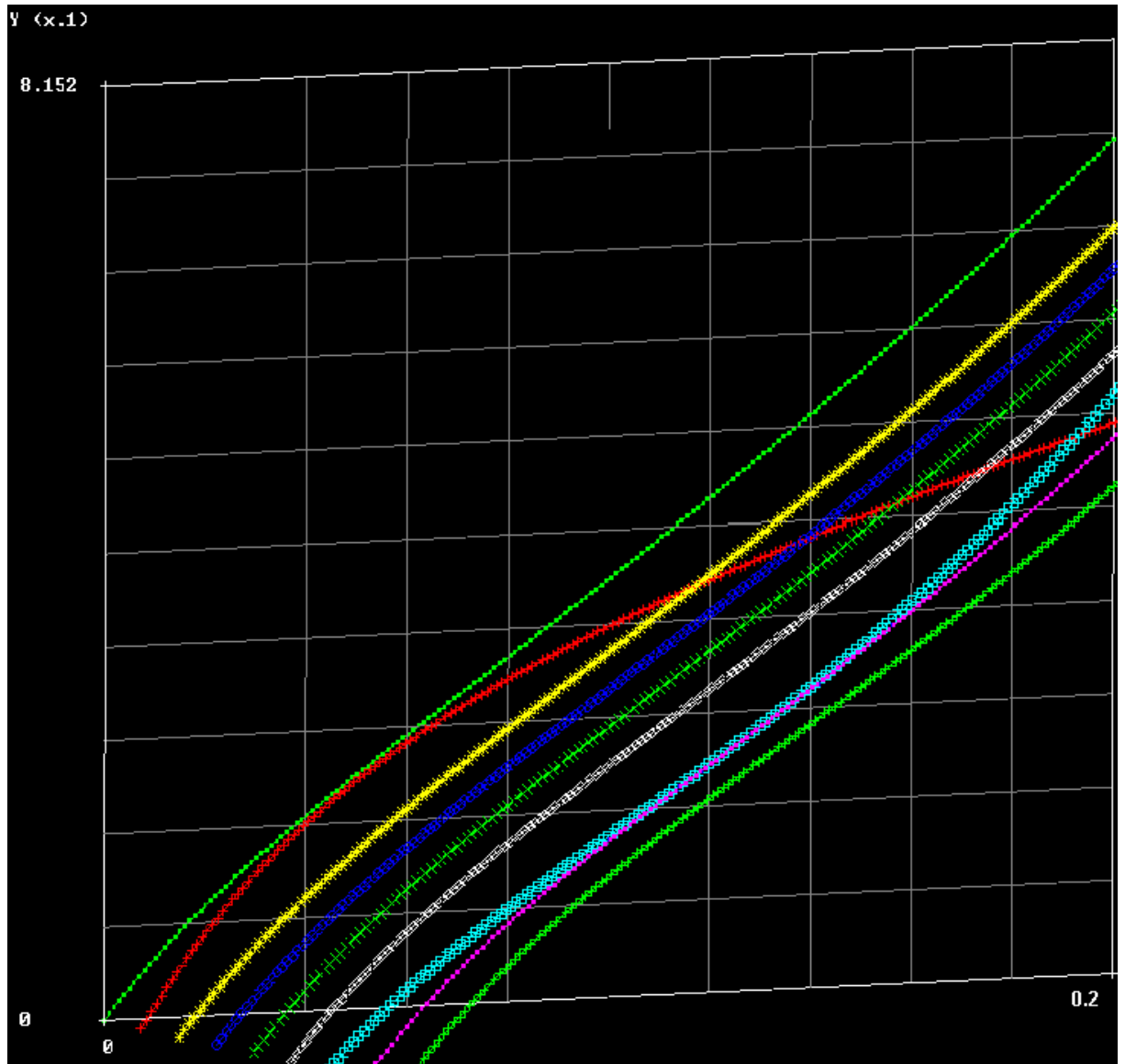
APPLY

RESET

OK

EVALUATE





%30'luk Gerinim

NEO-HOOKEAN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL

☒ BIAXIAL

☐ PLANAR SHEAR

☐ SIMPLE SHEAR

☐ VOLUMETRIC

☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

☐ EXTRAPOLATION

☒ RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS

C10 0.0873041

BULK MODULUS 0

ERROR 3.08806

COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE

MOONEY<2> CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS

C10 0.0577901
C01 0.0146587

BULK MODULUS 0

ERROR 0.00485835

MOONEY<3> CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS

C10 0.0570546
C01 0.0149799
C11 0

BULK MODULUS 0

ERROR 0.00654162

SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS

C10 0.0568453
C01 0.0150713
C20 0

BULK MODULUS 0

ERROR 0.0076357

COMPUTE
APPLY
RESET
OK
EVALUATE

SECOND ORDER INVARIANT CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS

C10 0.0574025
C01 0.0148284
C11 0
C20 0

BULK MODULUS 0

ERROR 0.00532591

COMPUTE
APPLY
RESET
OK
EVALUATE

THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ **BIAXIAL**
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ **POSITIVE COEFFICIENTS**
☐ EXTRAPOLATION

COEFFICIENTS

C10 0.0534422

C01 0.0165568

C11 0

C20 0

C30 0

BULK MODULUS 0

ERROR 0.0636732

YEON CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ **BIAXIAL**
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ **POSITIVE COEFFICIENTS**

COEFFICIENTS

C10 0.0749402

C20 0.00436275

C30 0

BULK MODULUS 0

ERROR 0.0389636

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ **BIAXIAL**
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☐ A/AB ☐ U/U0
☒ $t/t0$ ☒ $U/U0$
☐ $\epsilon/t0$ ☐ $U/U0$

NUMBER OF TERMS 2

☒ **POSITIVE COEFFICIENTS**

☐ MATHEMATICAL CHECKS

☐ EXTRAPOLATION

☒ **RELATIVE ERROR**

ERROR LIMIT 0.001

NUMBER OF ITERATIONS 20

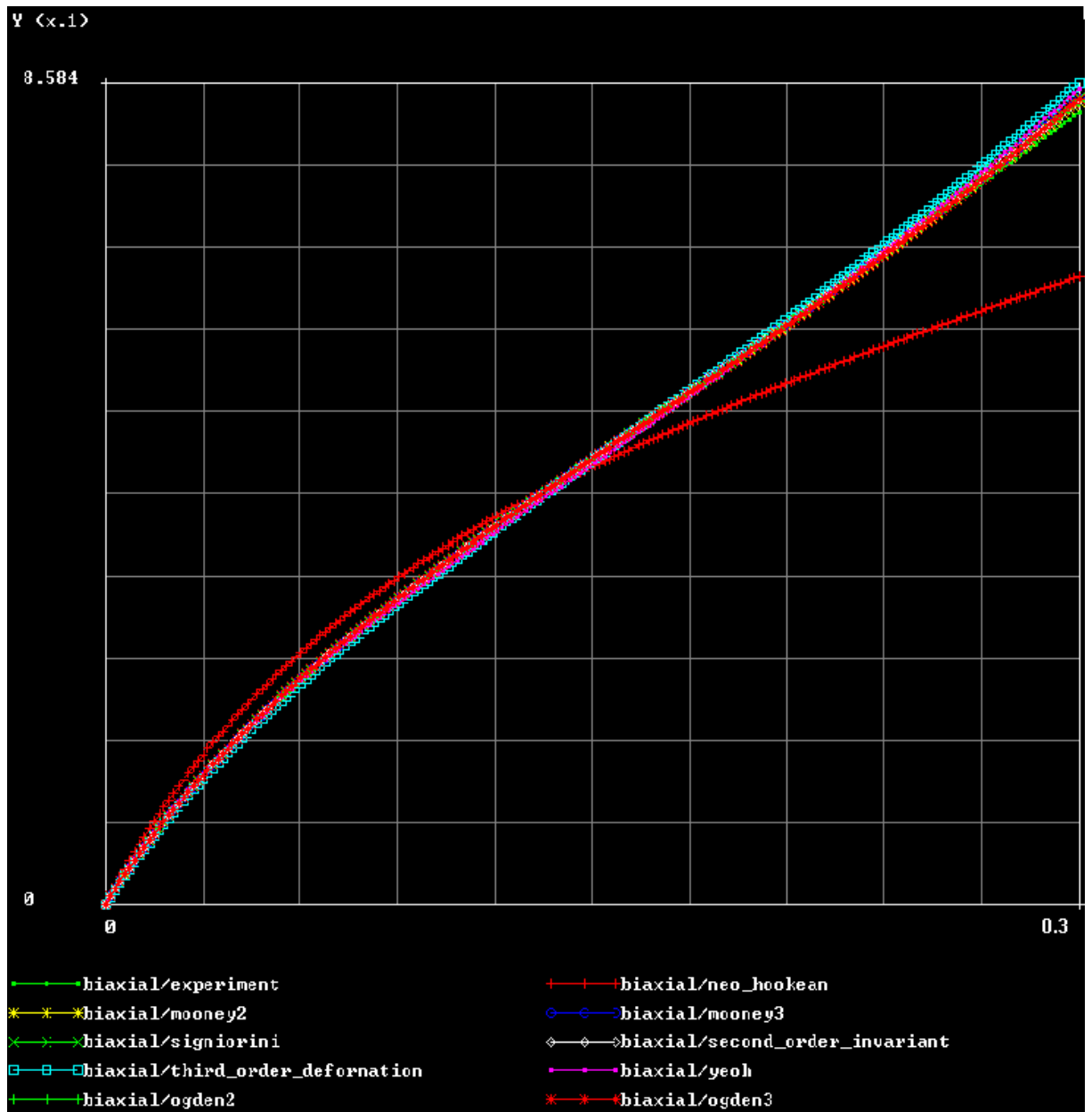
CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

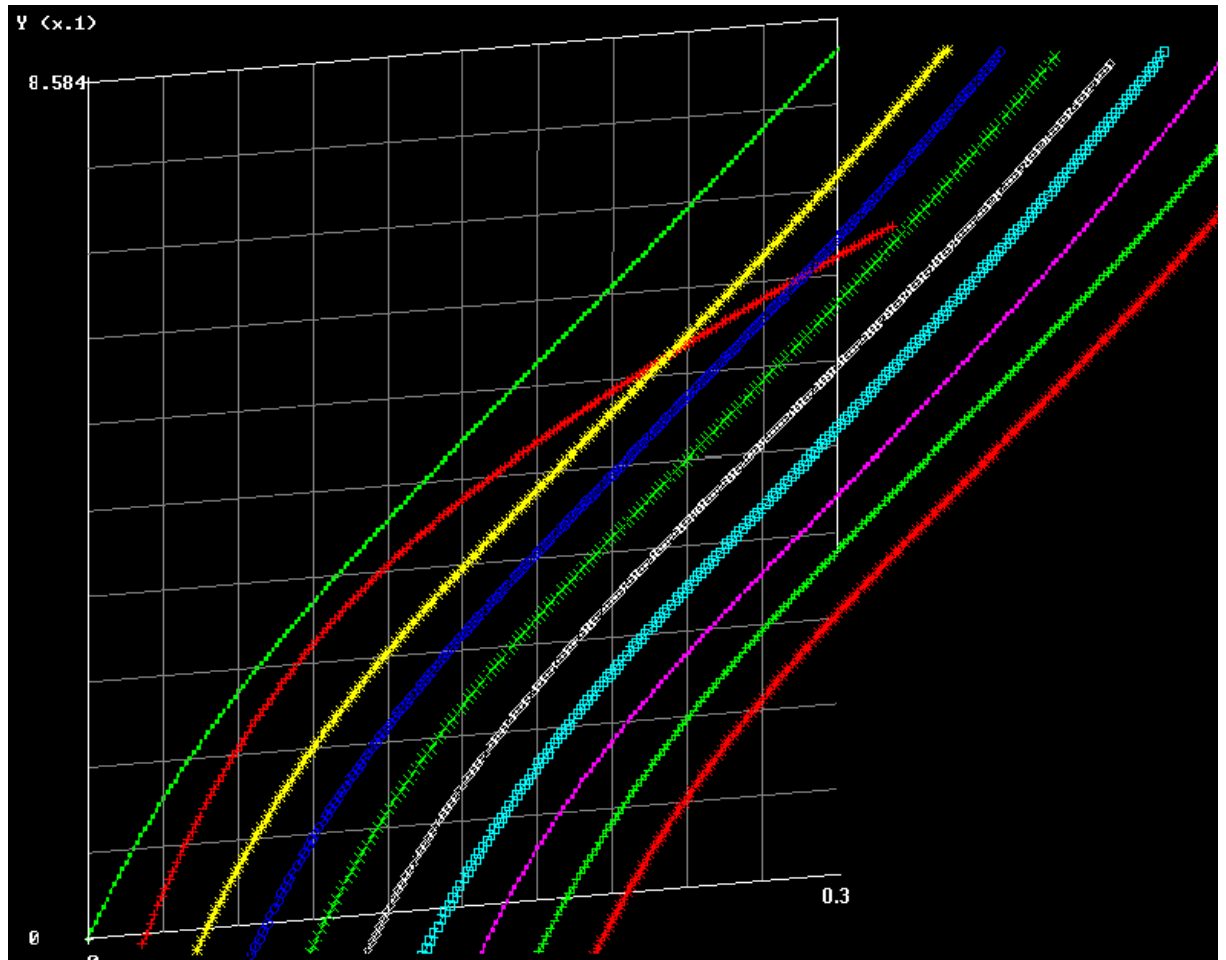
COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	25.6218	0.0149128
2	0.0441989	4.57866
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS 1461.16

ERROR 0.00550581





%40'lık Gerinim

NEO-HOOKEAN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ **BIAXIAL**
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ **POSITIVE COEFFICIENTS**
☐ EXTRAPOLATION
☐ **RELATIVE ERROR**

COEFFICIENTS
 C10 0.0990602

BULK MODULUS 0

ERROR 0.861802

COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE

MOONEY<2> CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS

C10 0.0810355
C01 0.00857322

BULK MODULUS 0

ERROR 0.00236897

MOONEY<3> CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS

C10 0.0820452
C01 0.00782532
C11 7.68173e-005

BULK MODULUS 0

ERROR 0.00199794

SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS

C10 0.0855099
C01 0.00485445
C20 0.00108402

BULK MODULUS 0

ERROR 0.00116716

SECOND ORDER INVARIANT CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS

C10 0.0907785
C01 0.000492114
C11 0
C20 0.00234997

BULK MODULUS 0

ERROR 0.00281075

COMPUTE
APPLY
RESET
OK

EVALUATE

THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ **BIAXIAL**
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ **POSITIVE COEFFICIENTS**
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS

C10	0.0706056
C01	0.0129594
C11	0
C20	0
C30	0

BULK MODULUS 0
 ERROR 0.256798

VEOH CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ **BIAXIAL**
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ **POSITIVE COEFFICIENTS**

COEFFICIENTS

C10	0.0911382
C20	0.00253467
C30	0

BULK MODULUS 0
 ERROR 0.00370747

OGDEN CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	<input type="checkbox"/> σ/σ_0	<input type="checkbox"/> U/U_0
<input checked="" type="checkbox"/> BIAXIAL	<input checked="" type="checkbox"/> ϵ/ϵ_0	<input checked="" type="checkbox"/> U/U_0
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	<input type="checkbox"/> ϵ/ϵ_0	<input type="checkbox"/> U/U_0
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR		
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC		
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA		

NUMBER OF TERMS 3
☒ **POSITIVE COEFFICIENTS**
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION
☒ **RELATIVE ERROR**
 ERROR LIMIT 0.001
 NUMBER OF ITERATIONS 20
 CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

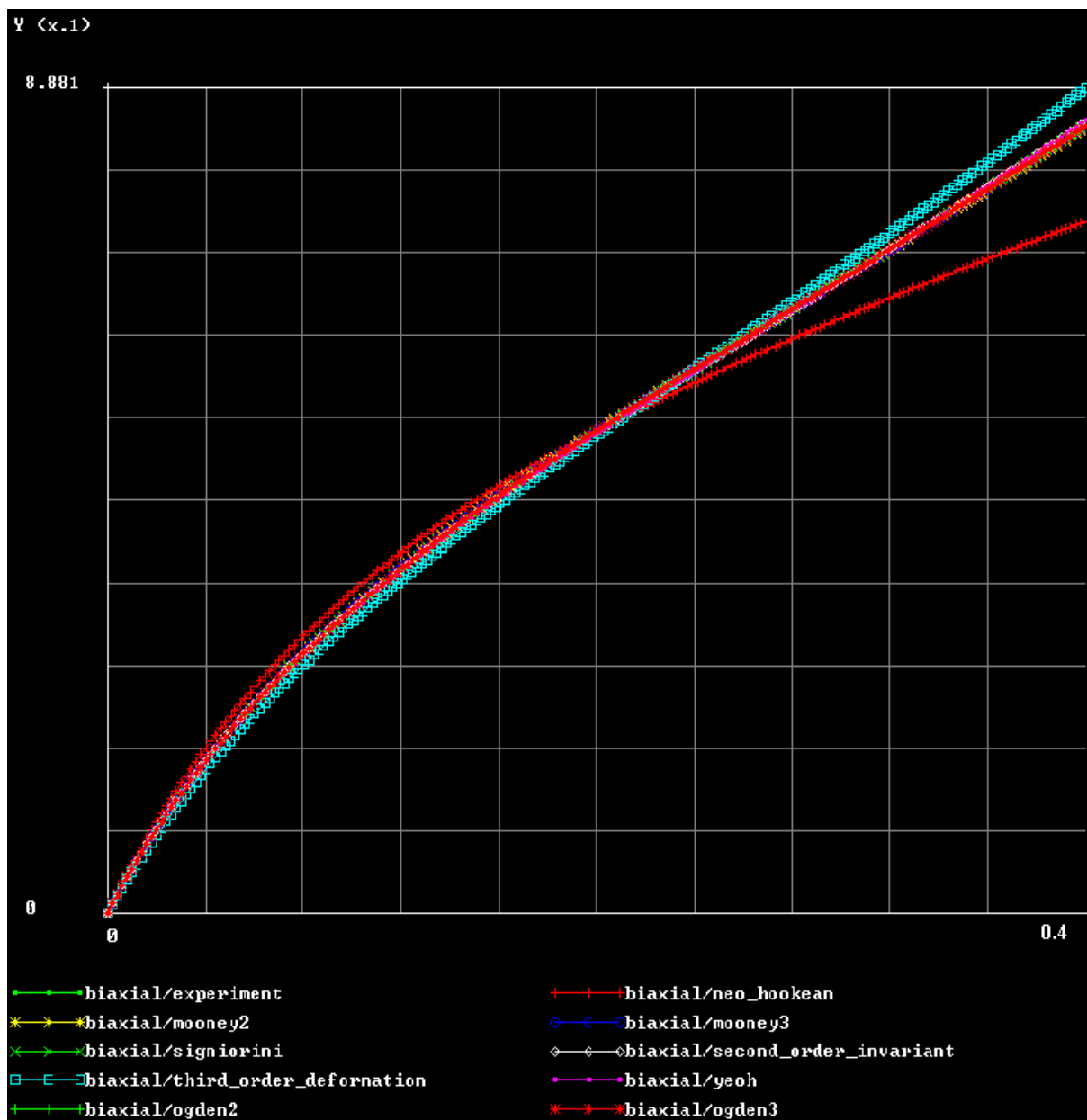
COEFFICIENTS

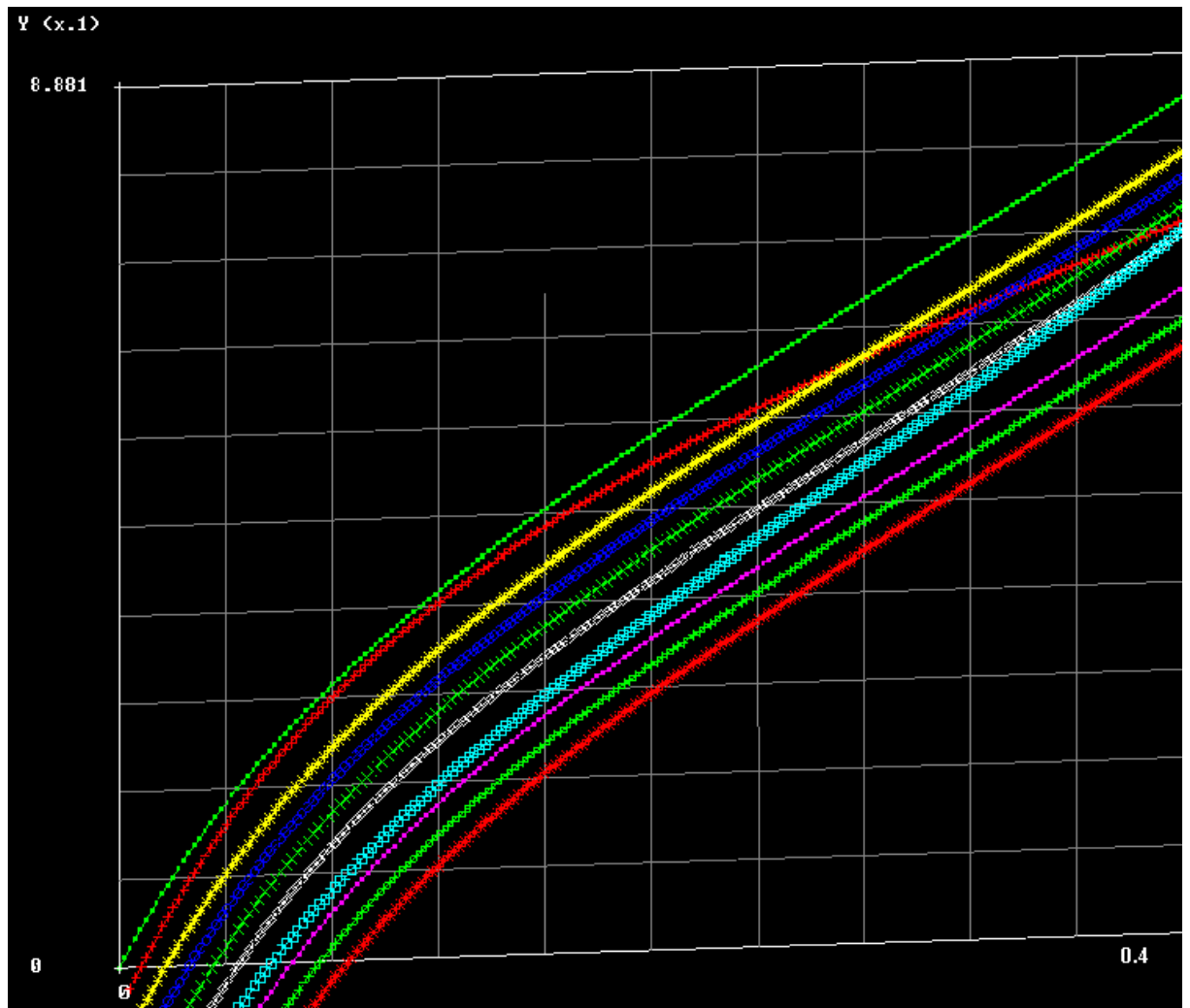
	MODULI	EXPONENTS
1	0.161269	2.35242
2	0.0335093	4.09656
3	5.04639	0.0415784
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS 1816.17
 ERROR 0.00032586

COMPUTE
 APPLY
 RESET
 OK

EVALUATE





%50'lik Gerinim

NEO-HOOKEAN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAxIAL

☒ BIAxIAL

☐ PLANAR SHEAR

☐ SIMPLE SHEAR

☐ VOLUMETRIC

☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

☐ EXTRAPOLATION

☒ RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS

C10 0.113026

BULK MODULUS 0

ERROR 0.861802

COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE

MOONEY<2> CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

COEFFICIENTS

C10 0.0924604
C01 0.00978194

BULK MODULUS 0
ERROR 0.00236897

MOONEY<3> CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

COEFFICIENTS

C10 0.0936125
C01 0.00892858
C11 8.76475e-005

BULK MODULUS 0
ERROR 0.00199794

SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA
☒ POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS

C10 0.0975657
C01 0.00553886
C20 0.00123685

BULK MODULUS 0
ERROR 0.00116716

SECOND ORDER INVARIANT CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☒ RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS

C10 0.103516
C01 0.000418172
C11 0
C20 0.00276475

BULK MODULUS 0
ERROR 0.003294

COMPUTE
APPLY
RESET
OK
EVALUATE

VEOH CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL
<input checked="" type="checkbox"/> BIAXIAL
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA

<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION	
<input type="checkbox"/> RELATIVE ERROR	

COMPUTE	APPLY	RESET	OK
---------	-------	-------	----

EVALUATE	
-----------------	--

COEFFICIENTS	
C10	0.103987
C20	0.00289203
C30	0

BULK MODULUS	0
--------------	---

ERROR	0.00370747
-------	------------

OGDEN CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	<input type="checkbox"/> A/A0	<input type="checkbox"/> U/U0
<input checked="" type="checkbox"/> BIAXIAL	<input checked="" type="checkbox"/> t/t0	<input checked="" type="checkbox"/> U/U0
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	<input type="checkbox"/> t/t0	<input type="checkbox"/> U/U0
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR		
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC		
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA		

NUMBER OF TERMS	2
-----------------	---

<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	
<input type="checkbox"/> MATHEMATICAL CHECKS	
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION	
<input type="checkbox"/> RELATIVE ERROR	

ERROR LIMIT	0.001
-------------	-------

NUMBER OF ITERATIONS	20
----------------------	----

CONVERGENCE TOLERANCE	1e-006
-----------------------	--------

COMPUTE	APPLY	RESET	OK
---------	-------	-------	----

EVALUATE	
-----------------	--

COEFFICIENTS		
	MODULI	EXPONENTS
1	0.193262	3.00394
2	9.7219	0.025805
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS	2078.55
--------------	---------

ERROR	8.76091e-008
-------	--------------

THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR

COMPUTE

APPLY

RESET

OK

EVALUATE

COEFFICIENTS

C10	0.0778622
C01	0.0159211
C11	0
C20	0
C30	0

BULK MODULUS

0

ERROR

0.385234

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☒ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

A/A0

U/U0

t/t0

U/U0

t/t0

U/U0

NUMBER OF TERMS

3

☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR

ERROR LIMIT

0.001

NUMBER OF ITERATIONS

20

CONVERGENCE TOLERANCE

1e-006

COMPUTE

APPLY

RESET

OK

EVALUATE

COEFFICIENTS

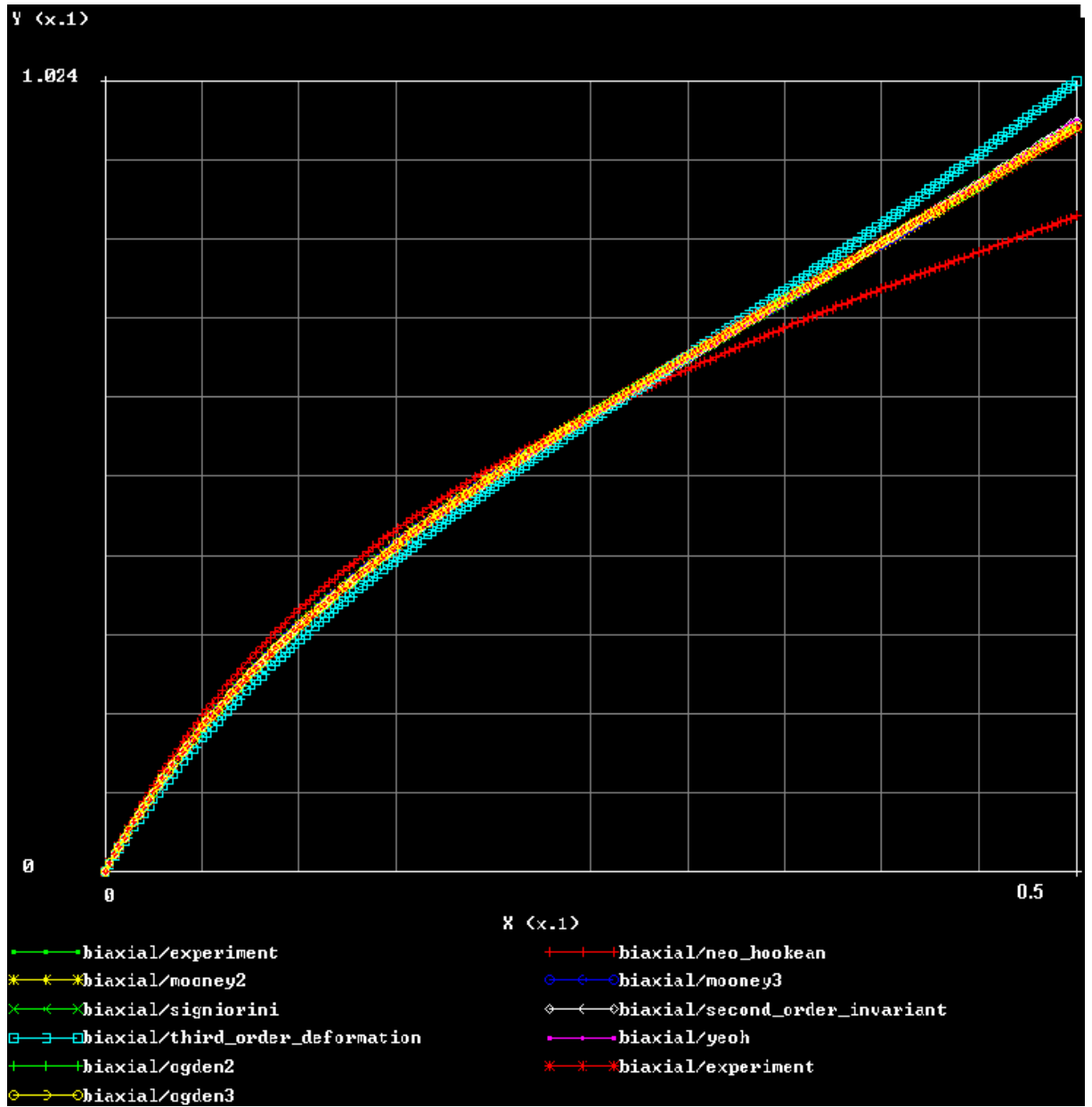
	MODULI	EXPONENTS
1	0.184006	2.35242
2	0.0382337	4.09656
3	5.75787	0.0415784
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

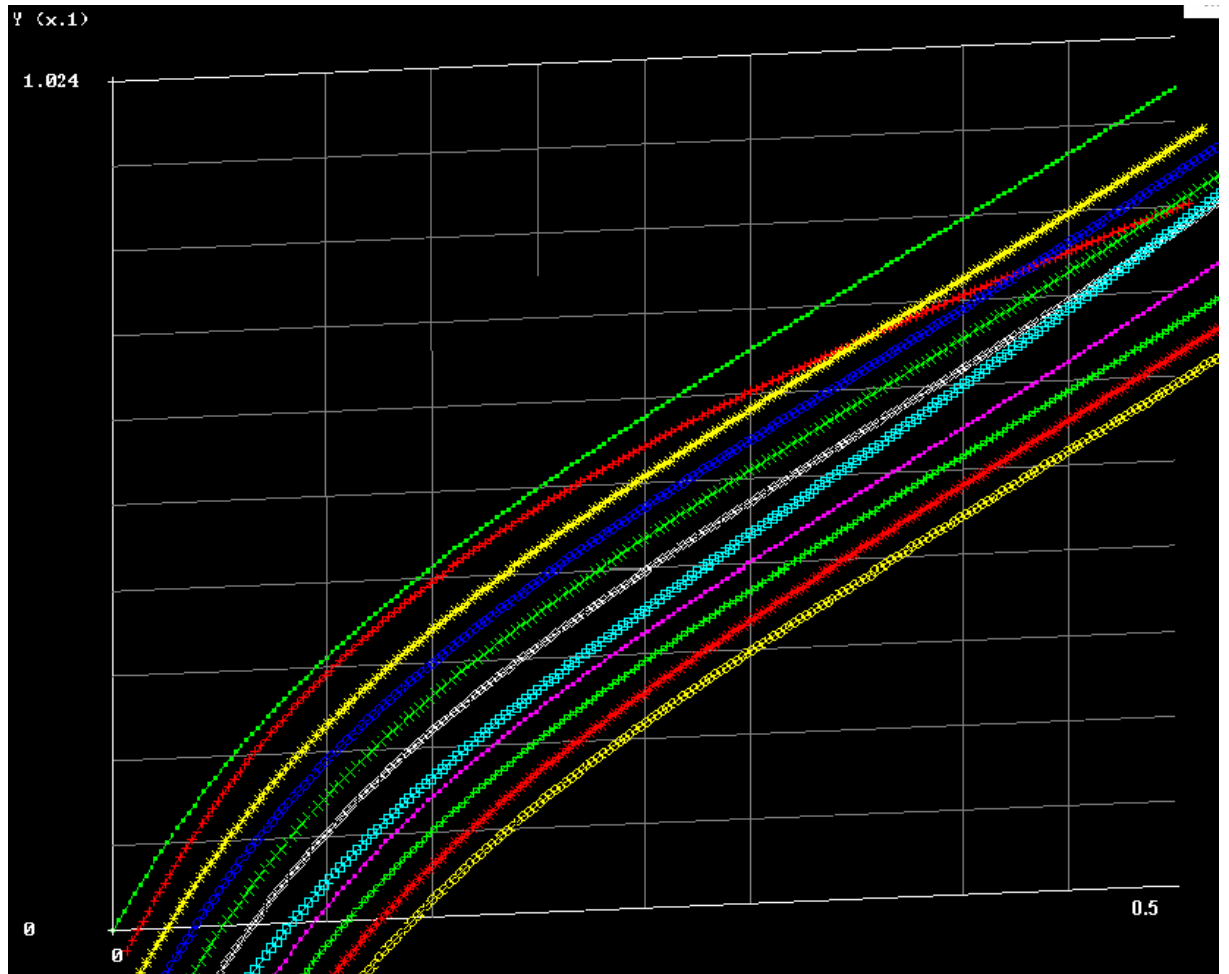
BULK MODULUS

2072.22

ERROR

0.00032586





Düzlemsel Kayma

%10'luk Gerinim

NEO-HOOKEAN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☒ **PLANAR SHEAR**
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ **POSITIVE COEFFICIENTS**
☐ EXTRAPOLATION
☐ **RELATIVE ERROR**

COEFFICIENTS
 C10 0.0570311
BULK MODULUS 0
ERROR 22.9434

COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE

MOONEY<2> CONTROL PARAMETERS

☐UNIAXIAL
☐BIAXIAL
☒PLANAR SHEAR
☐SIMPLE SHEAR
☐VOLUMETRIC
☐USE ALL DATA

COEFFICIENTS

C10 0.0285156
C01 0.0285156

BULK MODULUS 0

ERROR 22.9434

MOONEY<3> CONTROL PARAMETERS

☐UNIAXIAL
☐BIAXIAL
☒PLANAR SHEAR
☐SIMPLE SHEAR
☐VOLUMETRIC
☐USE ALL DATA
☒POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS

C10 0.0225012
C01 0.0225012
C11 0.0118302

BULK MODULUS 0

ERROR 7.38481

SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS

☐UNIAXIAL
☐BIAXIAL
☒PLANAR SHEAR
☐SIMPLE SHEAR
☐VOLUMETRIC
☐USE ALL DATA
☒POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS

C10 0.0225012
C01 0.0225012
C20 0.0118302

BULK MODULUS 0

ERROR 7.38481

SECOND ORDER INVARIANT CONTROL PARAMETERS

☐UNIAXIAL
☐BIAXIAL
☒PLANAR SHEAR
☐SIMPLE SHEAR
☐VOLUMETRIC
☐USE ALL DATA
☒POSITIVE COEFFICIENTS
☐EXTRAPOLATION
☒RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS

C10 0.0225012
C01 0.0225012
C11 0.00591509
C20 0.00591509

BULK MODULUS 0

ERROR 7.38481

COMPUTE
APPLY
RESET
OK

EVALUATE

THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS

☐UNIAXIAL
☐BIAXIAL
☒PLANAR SHEAR
☐SIMPLE SHEAR
☐VOLUMETRIC
☐USE ALL DATA
☒POSITIVE COEFFICIENTS
☐EXTRAPOLATION
☒RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS

C10 0.0241276
C01 0.0208335
C11 0.00731022
C20 0.0045385
C30 0

BULK MODULUS 0

ERROR 7.38489

COMPUTE
APPLY
RESET
OK

EVALUATE

OGDEN CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	Δ σ/σ_0	Δ U/U_0
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	Δ t/t_0	Δ U/U_0
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	Δ t/t_0	Δ U/U_0
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR		
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC		
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA		

NUMBER OF TERMS: 3
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION
 ▼ RELATIVE ERROR
 ERROR LIMIT: 0.001
 NUMBER OF ITERATIONS: 20
 CONVERGENCE TOLERANCE: 1e-006

COMPUTE APPLY RESET OK

COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	0.0452604	4.01533
2	1.42555e-006	0.496044
3	1.60683e-006	3.2576
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS: 454.354
 ERROR: 7.40595

EVALUATE

OGDEN CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	Δ σ/σ_0	Δ U/U_0
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	Δ t/t_0	Δ U/U_0
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	Δ t/t_0	Δ U/U_0
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR		
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC		
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA		

NUMBER OF TERMS: 2
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION
 ▼ RELATIVE ERROR
 ERROR LIMIT: 0.001
 NUMBER OF ITERATIONS: 20
 CONVERGENCE TOLERANCE: 1e-006

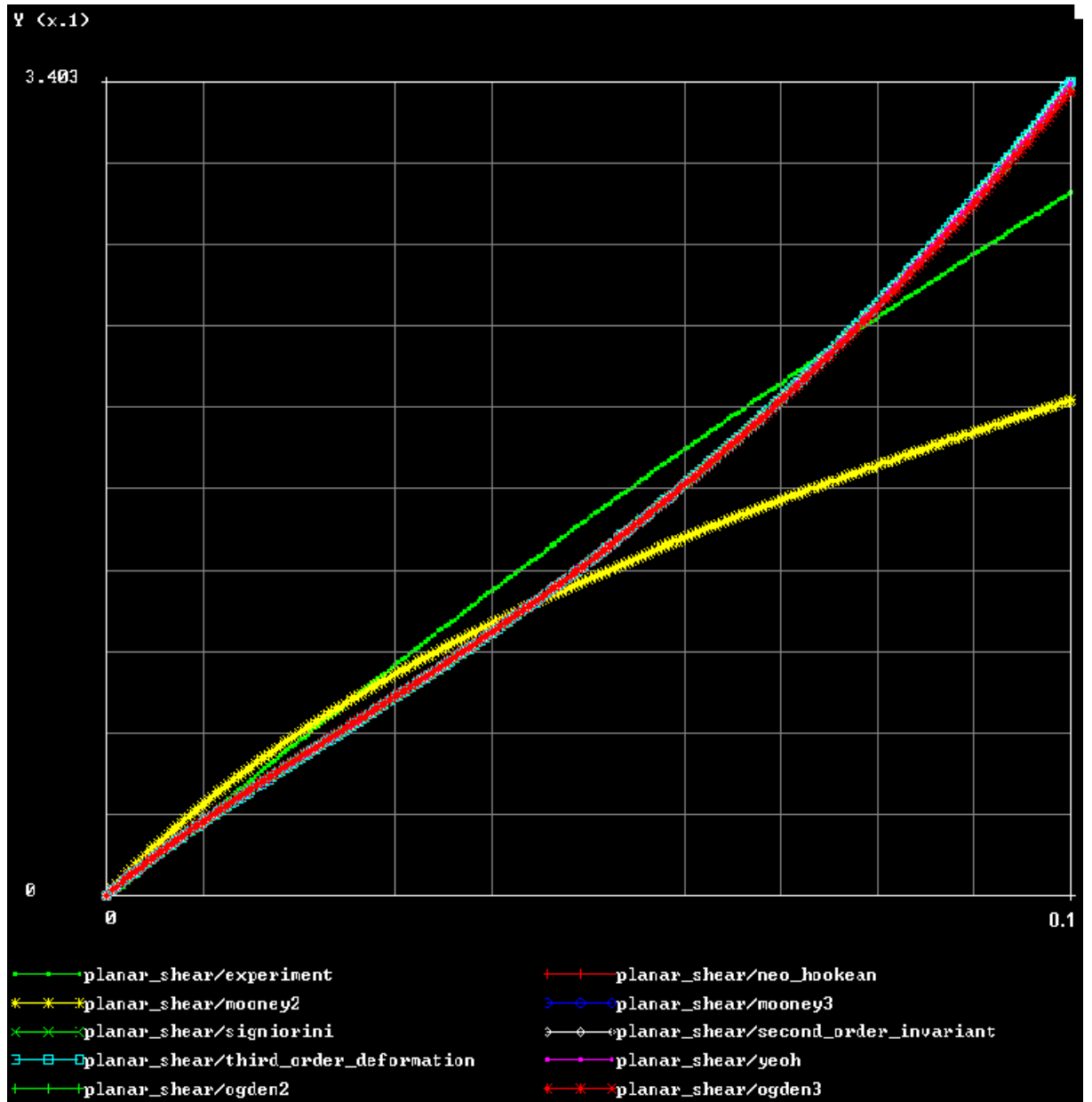
COMPUTE APPLY RESET OK

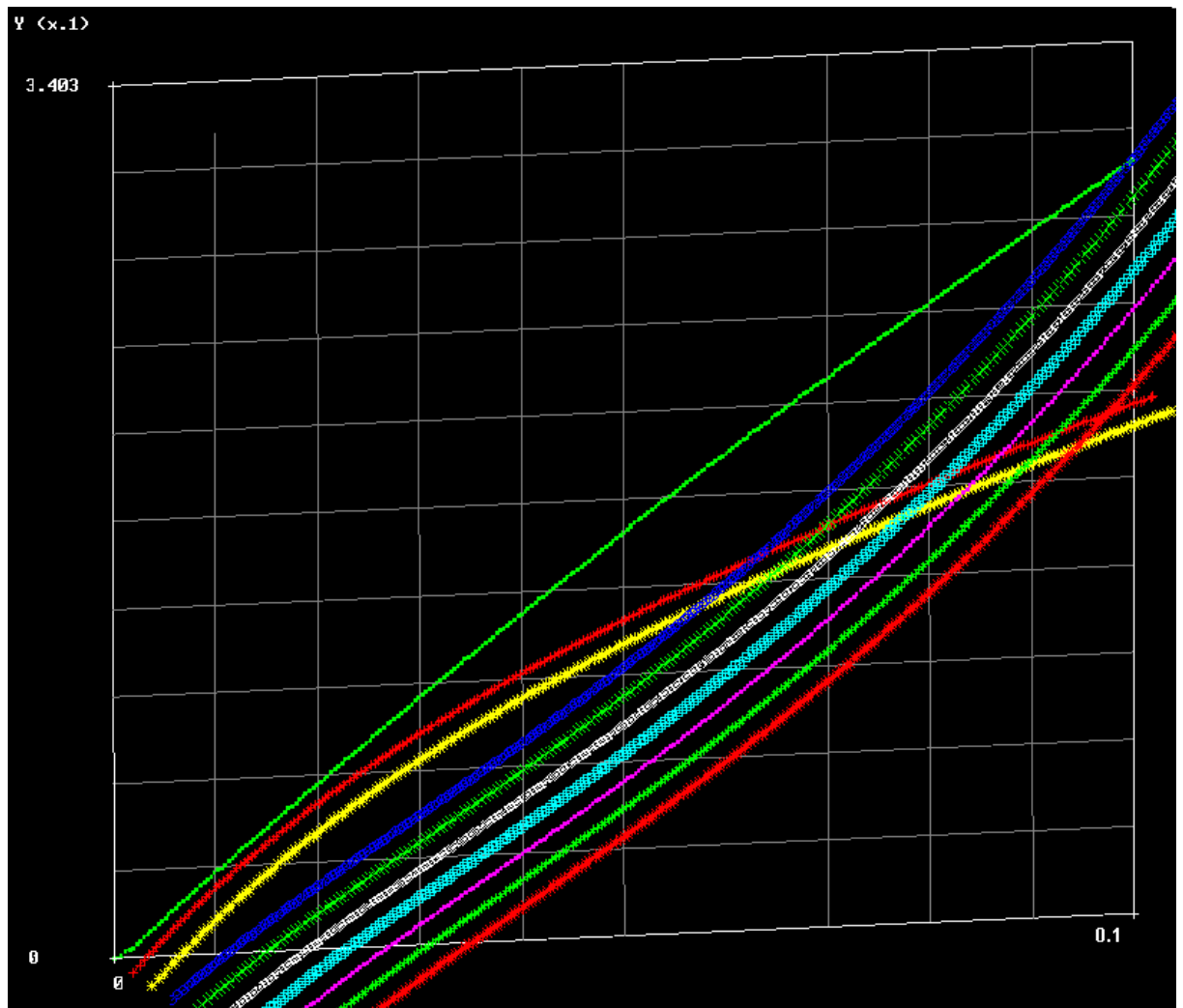
COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	3.77005	1.89382e-007
2	0.0452622	4.01518
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS: 454.341
 ERROR: 7.40595

EVALUATE





%20'lik Gerinim

NEO-HOOKEAN CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	C10 0.106089
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	BULK MODULUS 0
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	ERROR 21.2865
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION	
<input checked="" type="checkbox"/> RELATIVE ERROR	

MOONEY<2> CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS	C10	0.0530447
<input type="checkbox"/> BIAxIAL		C01	0.0530447
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR		BULK MODULUS 0	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR		ERROR 21.2865	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC			
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA			

MOONEY<3> CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS	C10	0.044522
<input type="checkbox"/> BIAxIAL		C01	0.044522
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR		C11	0.0155006
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR		BULK MODULUS 0	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC		ERROR 5.8282	
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA			
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS			

SECOND ORDER INVARIANT CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS	C10	0.044522
<input type="checkbox"/> BIAxIAL		C01	0.044522
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR		C11	0.00775032
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR		C20	0.00775032
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC		BULK MODULUS 0	
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA		ERROR 5.8282	
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS			
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION			

THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS	C10	0.044517
<input type="checkbox"/> BIAxIAL		C01	0.044517
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR		C11	0.0079127
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR		C20	0.00759016
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC		C30	0
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA		BULK MODULUS 0	
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS		ERROR 5.82821	
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION			

SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS	C10	0.044522
<input type="checkbox"/> BIAxIAL		C01	0.044522
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR		C20	0.0155006
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR		BULK MODULUS 0	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC		ERROR 5.8282	
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA			
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS			
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION			
<input checked="" type="checkbox"/> RELATIVE ERROR			

YEOH CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☒ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS

C10 0.0890115

C20 0.0155258

C30 0

BULK MODULUS 0

ERROR 5.82825

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL Δ A/A0 Δ U/U0
☐ BIAXIAL Δ t/t0 Δ U/U0
☒ PLANAR SHEAR Δ t/t0 Δ U/U0
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

NUMBER OF TERMS 2

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

☐ MATHEMATICAL CHECKS

☐ EXTRAPOLATION

▼ RELATIVE ERROR

ERROR LIMIT 0.001

NUMBER OF ITERATIONS 20

CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	1.85693e-006	0.753602
2	0.0998382	3.56776
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS 890.499

ERROR 5.61703

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL Δ A/A0 Δ U/U0
☐ BIAXIAL Δ t/t0 Δ U/U0
☒ PLANAR SHEAR Δ t/t0 Δ U/U0
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

NUMBER OF TERMS 3

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

☐ MATHEMATICAL CHECKS

☐ EXTRAPOLATION

▼ RELATIVE ERROR

ERROR LIMIT 0.001

NUMBER OF ITERATIONS 20

CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

COEFFICIENTS

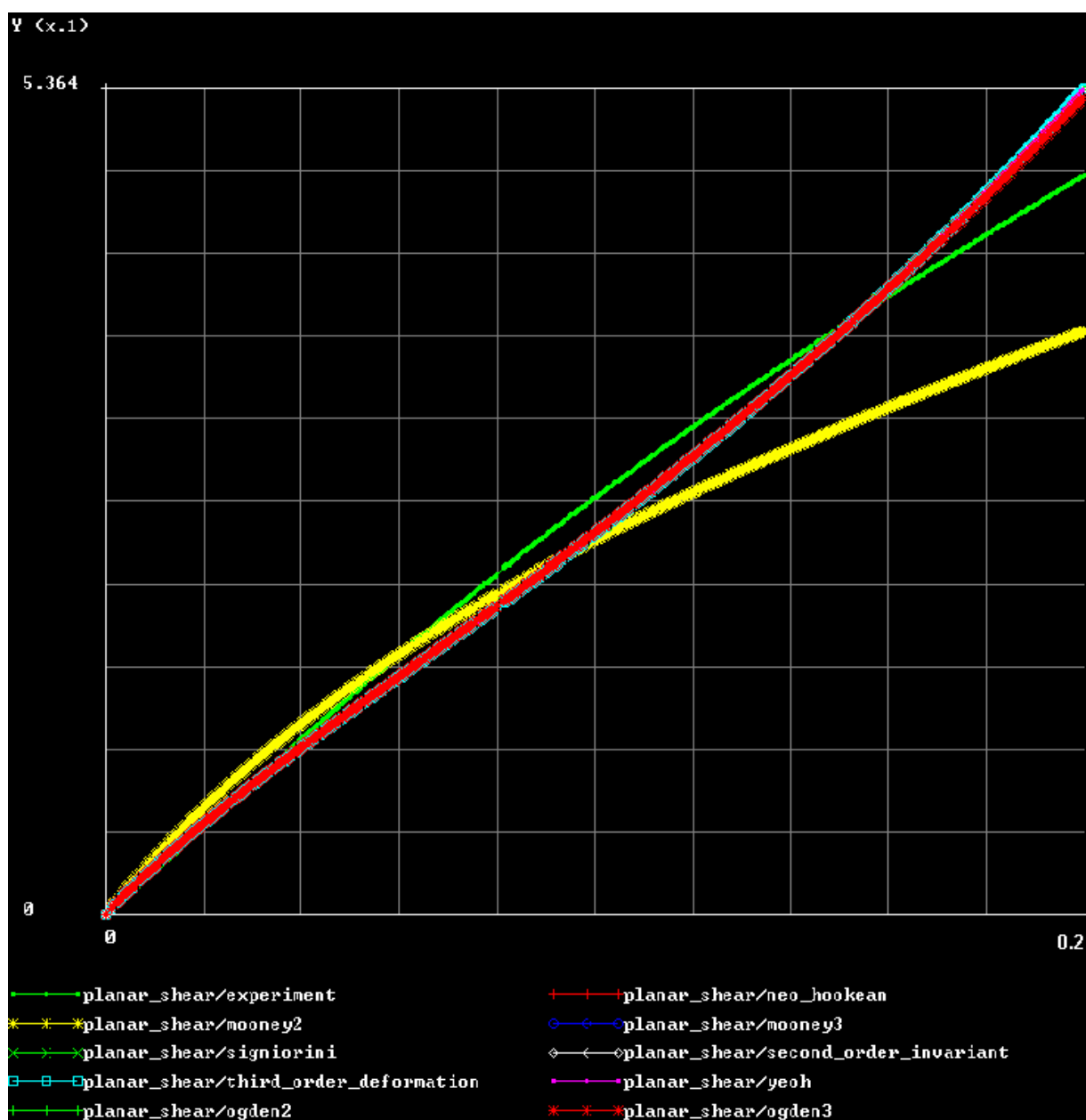
	MODULI	EXPONENTS
1	6.07748e-006	0.127141
2	0.0998403	3.56778
3	0.30836	4.36627e-006
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

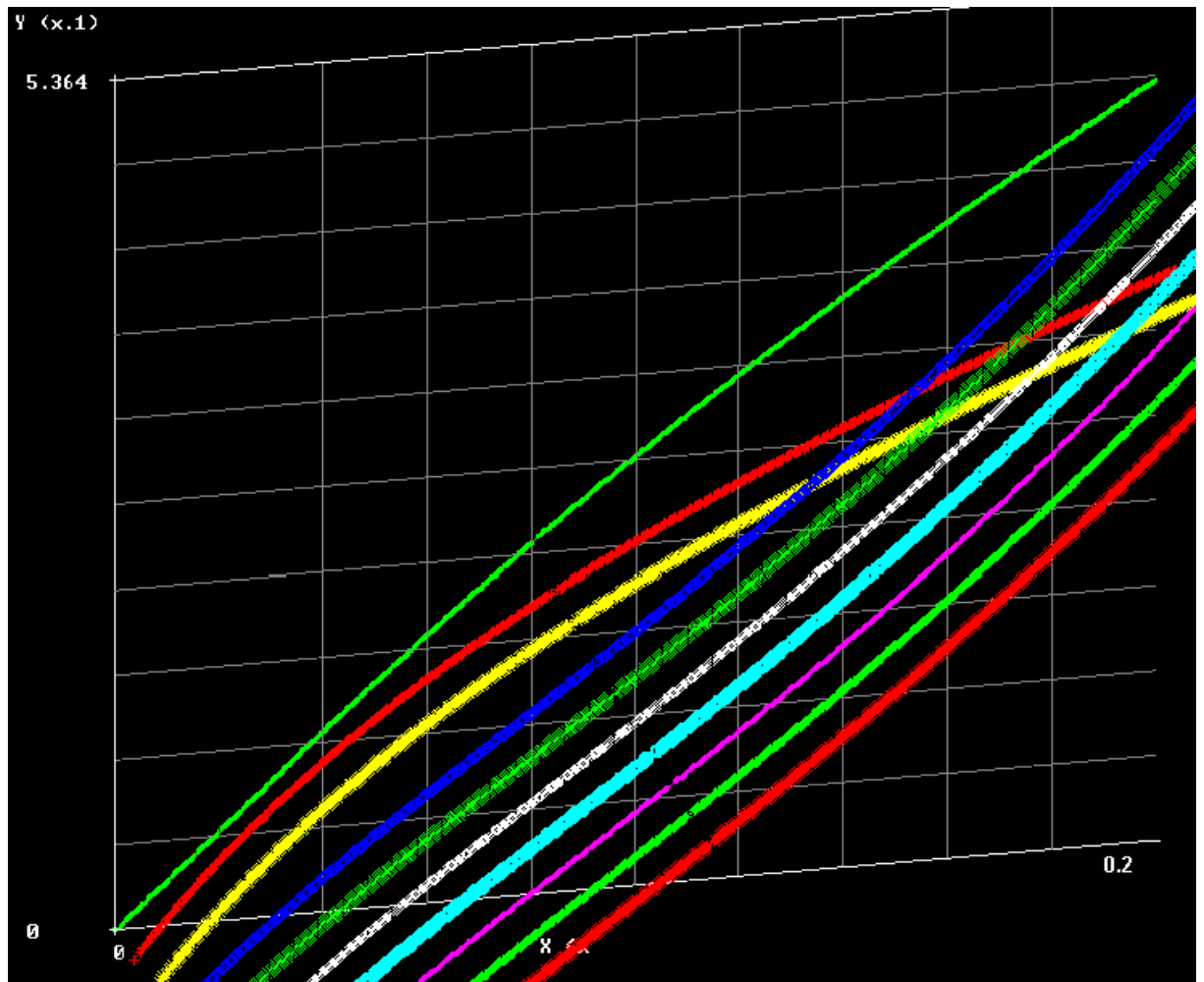
BULK MODULUS 890.527

ERROR 5.61703

COMPUTE APPLY RESET OK

EVALUATE





%30'luk Gerinim

NEO-HOOKEAN CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	C10 0.151137
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	BULK MODULUS 0
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	ERROR 8.15411
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION	
<input type="checkbox"/> RELATIVE ERROR	

MOONEY<2> CONTROL PARAMETERS					
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr><td>C10</td><td>0.0755684</td></tr> <tr><td>C01</td><td>0.0755684</td></tr> </table>	C10	0.0755684	C01	0.0755684
C10		0.0755684			
C01		0.0755684			
<input type="checkbox"/> BIAxIAL					
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR					
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR					
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC					
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0				
	ERROR 8.15411				

MOONEY<3> CONTROL PARAMETERS							
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr><td>C10</td><td>0.0685406</td></tr> <tr><td>C01</td><td>0.0685406</td></tr> <tr><td>C11</td><td>0.0129338</td></tr> </table>	C10	0.0685406	C01	0.0685406	C11	0.0129338
C10		0.0685406					
C01		0.0685406					
C11		0.0129338					
<input type="checkbox"/> BIAxIAL							
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR							
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR							
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC							
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0						
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 2.47048						

SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS							
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr><td>C10</td><td>0.0685406</td></tr> <tr><td>C01</td><td>0.0685406</td></tr> <tr><td>C20</td><td>0.0129338</td></tr> </table>	C10	0.0685406	C01	0.0685406	C20	0.0129338
C10		0.0685406					
C01		0.0685406					
C20		0.0129338					
<input type="checkbox"/> BIAxIAL							
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR							
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR							
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC							
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0						
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 2.47048						

SECOND ORDER INVARIANT CONTROL PARAMETERS									
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr><td>C10</td><td>0.0685406</td></tr> <tr><td>C01</td><td>0.0685406</td></tr> <tr><td>C11</td><td>0.00646691</td></tr> <tr><td>C20</td><td>0.00646691</td></tr> </table>	C10	0.0685406	C01	0.0685406	C11	0.00646691	C20	0.00646691
C10		0.0685406							
C01		0.0685406							
C11		0.00646691							
C20		0.00646691							
<input type="checkbox"/> BIAxIAL									
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR									
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR									
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC									
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0								
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 2.47048								
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION									

THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS											
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr><td>C10</td><td>0.0739951</td></tr> <tr><td>C01</td><td>0.0630316</td></tr> <tr><td>C11</td><td>0.0101279</td></tr> <tr><td>C20</td><td>0.00286884</td></tr> <tr><td>C30</td><td>0</td></tr> </table>	C10	0.0739951	C01	0.0630316	C11	0.0101279	C20	0.00286884	C30	0
C10		0.0739951									
C01		0.0630316									
C11		0.0101279									
C20		0.00286884									
C30		0									
<input type="checkbox"/> BIAxIAL											
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR											
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR											
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC											
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA											
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS											
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION	BULK MODULUS 0										
<input checked="" type="checkbox"/> RELATIVE ERROR	ERROR 2.47062										

COMPUTE	APPLY	RESET	OK	EVALUATE
---------	-------	-------	----	----------

YEON CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☒ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR

COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE

COEFFICIENTS

C10	0.137125
C20	0.0129111
C30	0

BULK MODULUS 0

ERROR 2.47051

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL $\Delta A/A0$ $\Delta U/U0$
☐ BIAXIAL $\Delta t/t0$ $\Delta U/U0$
☒ PLANAR SHEAR $\Delta t/t0$ $\Delta U/U0$
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

NUMBER OF TERMS 2
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR
 ERROR LIMIT 0.001
 NUMBER OF ITERATIONS 20
 CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE

COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	0.181376	3.01279
2	1.42206	1.04993e-006
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS 1366.13

ERROR 2.32412

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL $\Delta A/A0$ $\Delta U/U0$
☐ BIAXIAL $\Delta t/t0$ $\Delta U/U0$
☒ PLANAR SHEAR $\Delta t/t0$ $\Delta U/U0$
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

NUMBER OF TERMS 3
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR
 ERROR LIMIT 0.001
 NUMBER OF ITERATIONS 20
 CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

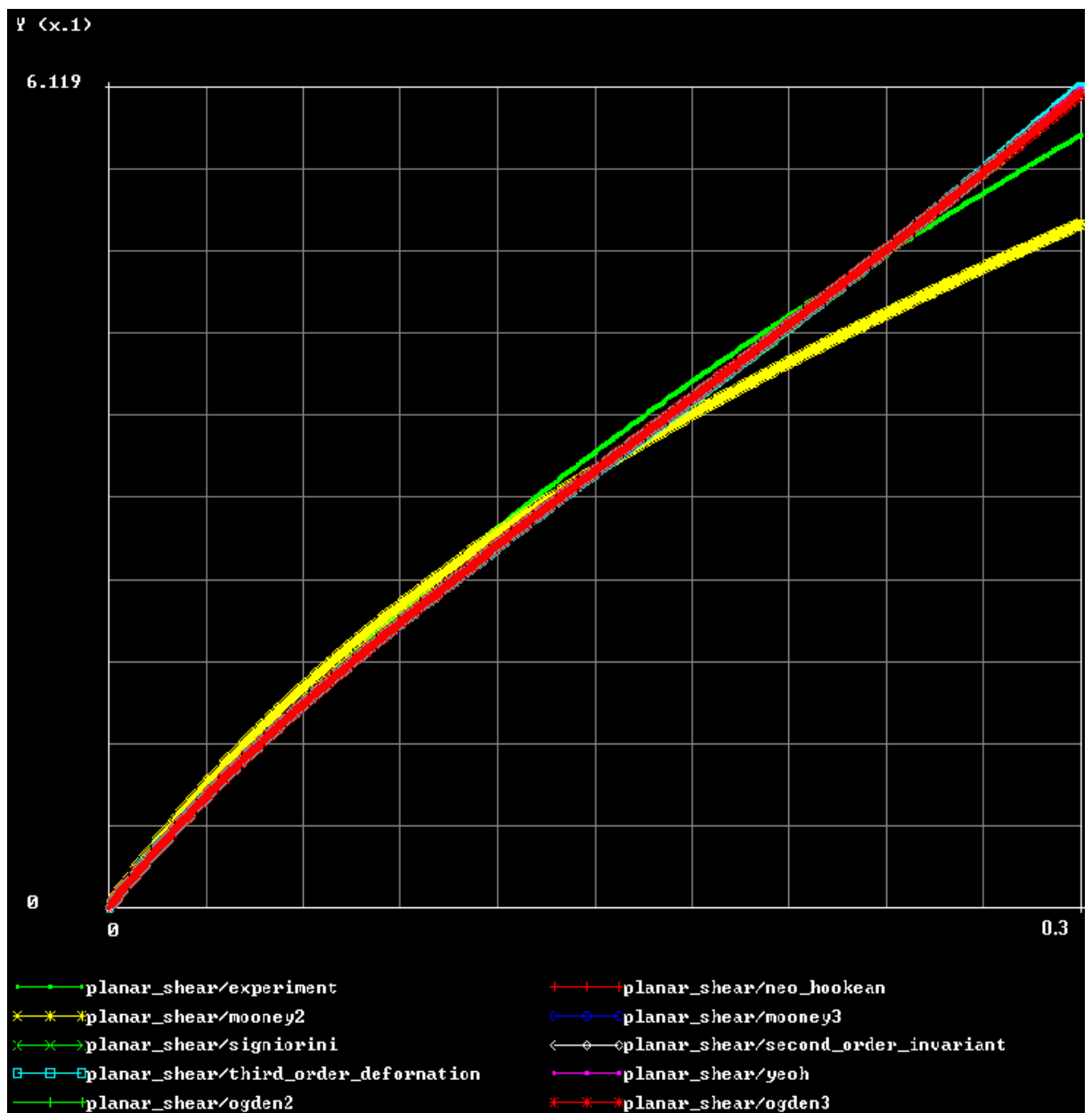
COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE

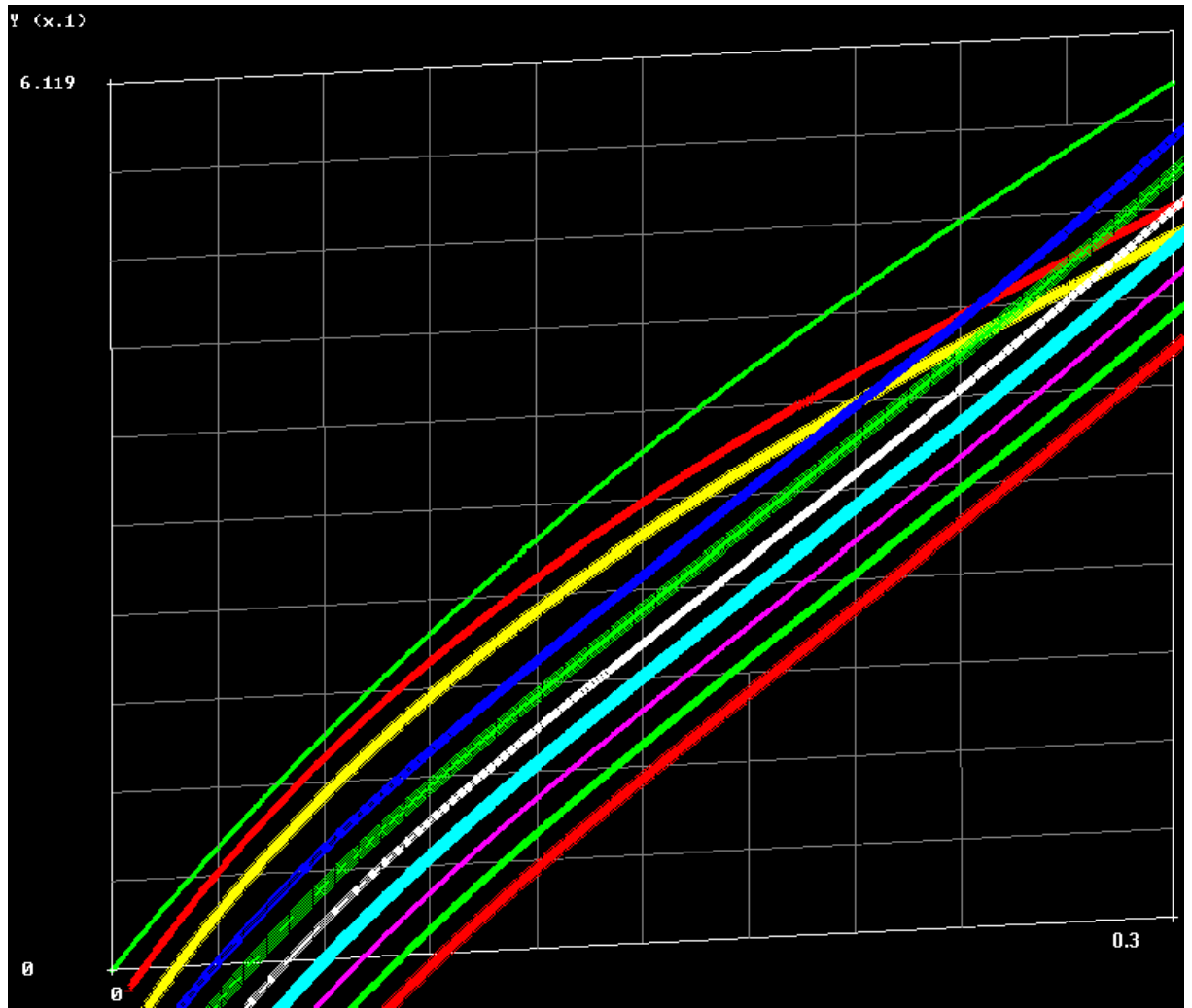
COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	1.25821e-006	0.521774
2	0.181358	3.01295
3	8.32098e-006	0.320816
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS 1366.06

ERROR 2.32412





%40'luk Gerinim

NEO-HOOKEAN CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	C10 0.18319
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	BULK MODULUS 0
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	ERROR 3.58842
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION	
<input type="checkbox"/> RELATIVE ERROR	

MOONEY<2> CONTROL PARAMETERS											
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr><td>C10</td><td>0.0915951</td></tr> <tr><td>C01</td><td>0.0915951</td></tr> </table>	C10	0.0915951	C01	0.0915951						
C10		0.0915951									
C01		0.0915951									
<input type="checkbox"/> BIAXIAL											
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR											
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR											
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC											
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0										
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 3.58842										
MOONEY<3> CONTROL PARAMETERS											
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr><td>C10</td><td>0.0847754</td></tr> <tr><td>C01</td><td>0.0847754</td></tr> <tr><td>C11</td><td>0.0107901</td></tr> </table>	C10	0.0847754	C01	0.0847754	C11	0.0107901				
C10		0.0847754									
C01		0.0847754									
C11		0.0107901									
<input type="checkbox"/> BIAXIAL											
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR											
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR											
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC											
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0										
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 0.950034										
SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS											
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr><td>C10</td><td>0.0847754</td></tr> <tr><td>C01</td><td>0.0847754</td></tr> <tr><td>C20</td><td>0.0107901</td></tr> </table>	C10	0.0847754	C01	0.0847754	C20	0.0107901				
C10		0.0847754									
C01		0.0847754									
C20		0.0107901									
<input type="checkbox"/> BIAXIAL											
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR											
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR											
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC											
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0										
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 0.950034										
SECOND ORDER INVARIANT CONTROL PARAMETERS											
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr><td>C10</td><td>0.0847754</td></tr> <tr><td>C01</td><td>0.0847754</td></tr> <tr><td>C11</td><td>0.00539507</td></tr> <tr><td>C20</td><td>0.00539507</td></tr> </table>	C10	0.0847754	C01	0.0847754	C11	0.00539507	C20	0.00539507		
C10		0.0847754									
C01		0.0847754									
C11		0.00539507									
C20		0.00539507									
<input type="checkbox"/> BIAXIAL											
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR											
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR											
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC											
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0										
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 0.950034										
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION											
THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS											
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr><td>C10</td><td>0.0912774</td></tr> <tr><td>C01</td><td>0.0783387</td></tr> <tr><td>C11</td><td>0.00677113</td></tr> <tr><td>C20</td><td>0.00399397</td></tr> <tr><td>C30</td><td>0</td></tr> </table>	C10	0.0912774	C01	0.0783387	C11	0.00677113	C20	0.00399397	C30	0
C10		0.0912774									
C01		0.0783387									
C11		0.00677113									
C20		0.00399397									
C30	0										
<input type="checkbox"/> BIAXIAL											
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR											
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR											
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC											
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0										
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 0.950067										
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION											
<input checked="" type="checkbox"/> RELATIVE ERROR											
<input type="button" value="COMPUTE"/> <input type="button" value="APPLY"/> <input type="button" value="RESET"/> <input type="button" value="OK"/>	<input type="button" value="EVALUATE"/>										

YEON CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☒ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA
☒ POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS

C10	0.16974
C20	0.0106651
C30	0

BULK MODULUS 0
 ERROR 0.950405

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☒ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

λ/λ_0	U/U_0
t/t_0	U/U_0
t/t_0	U/U_0

NUMBER OF TERMS 2
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION
 ▼ RELATIVE ERROR
 ERROR LIMIT 0.001
 NUMBER OF ITERATIONS 20
 CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	1.27941e-006	2.2116
2	0.245144	2.75478
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS 1688.3
 ERROR 0.850103

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☒ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

λ/λ_0	U/U_0
t/t_0	U/U_0
t/t_0	U/U_0

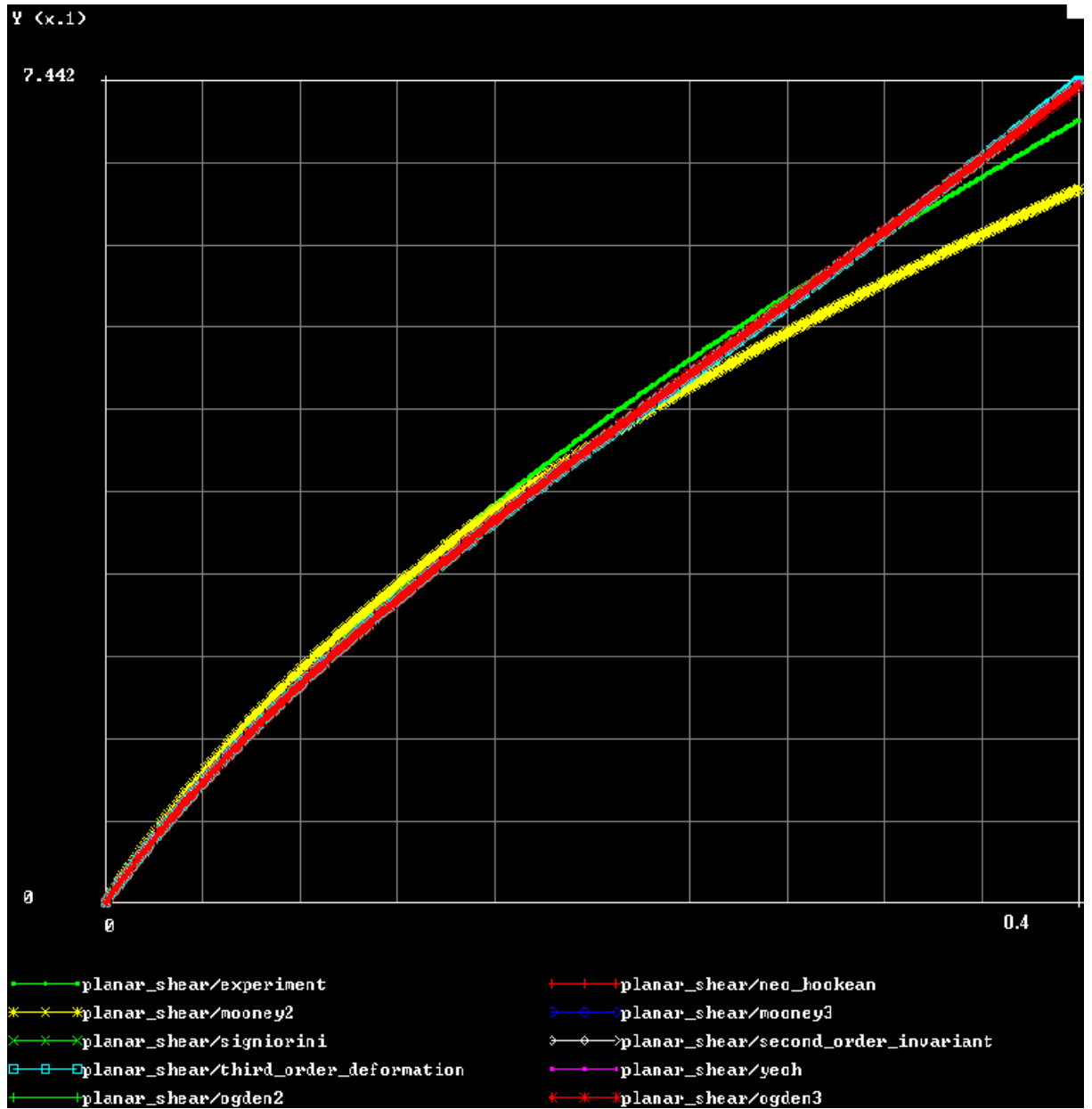
NUMBER OF TERMS 3
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION
 ▼ RELATIVE ERROR
 ERROR LIMIT 0.001
 NUMBER OF ITERATIONS 20
 CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

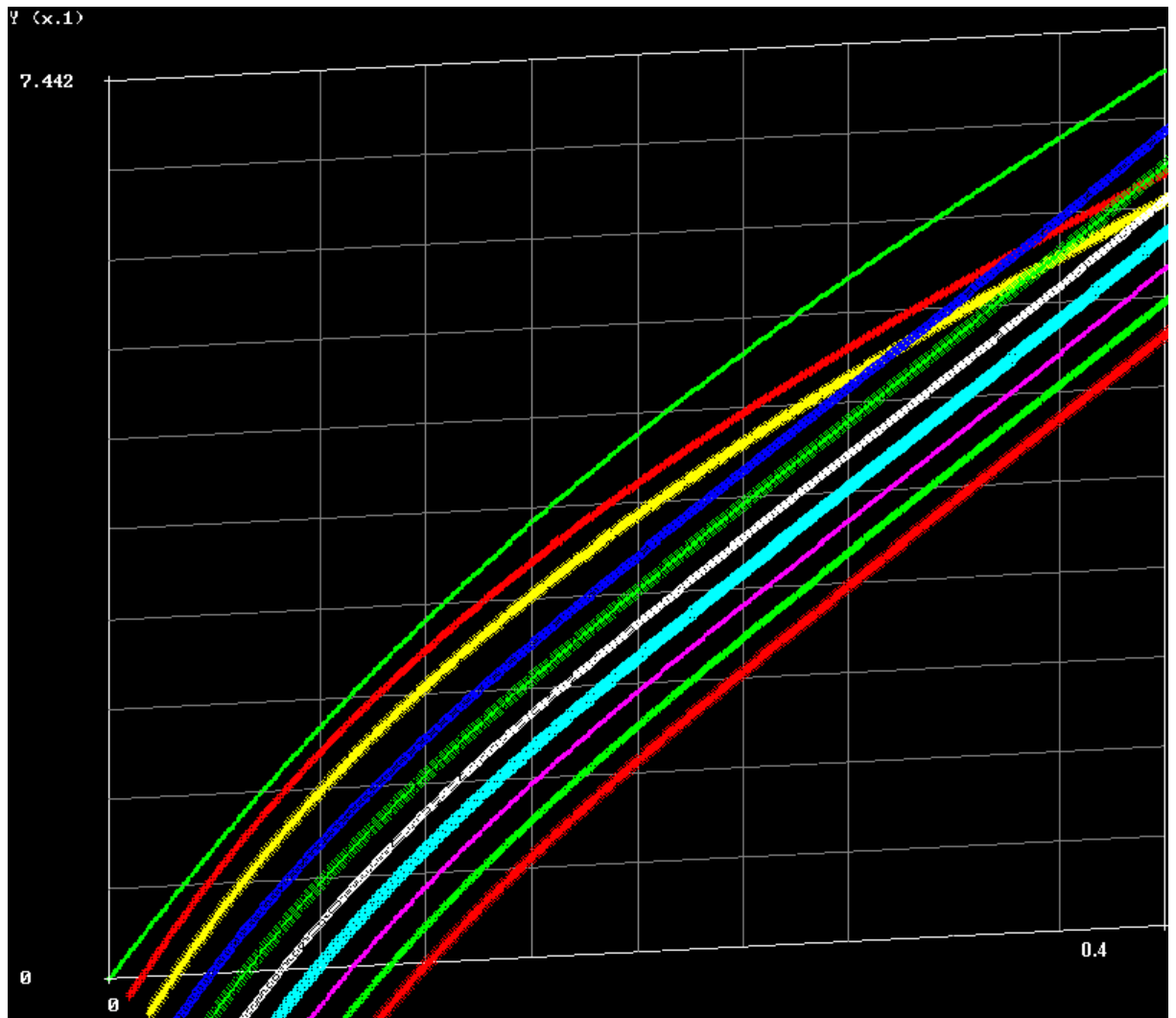
COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	6.71533e-006	0.137678
2	0.245155	2.75471
3	0.172613	9.47471e-006
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS 1688.33
 ERROR 0.850104

COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE





%50'lik Gerinim

NEO-HOOKEAN CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	C10 0.196635
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	BULK MODULUS 0
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	ERROR 11.5094
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION	
<input type="checkbox"/> RELATIVE ERROR	

MOONEY<2> CONTROL PARAMETERS					
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr> <td>C10</td> <td>0.0983175</td> </tr> <tr> <td>C01</td> <td>0.0983175</td> </tr> </table>	C10	0.0983175	C01	0.0983175
C10		0.0983175			
C01		0.0983175			
<input type="checkbox"/> BIAXIAL					
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR					
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR					
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC					
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0				
	ERROR 11.5094				

MOONEY<3> CONTROL PARAMETERS							
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr> <td>C10</td> <td>0.0894885</td> </tr> <tr> <td>C01</td> <td>0.0894885</td> </tr> <tr> <td>C11</td> <td>0.0140442</td> </tr> </table>	C10	0.0894885	C01	0.0894885	C11	0.0140442
C10		0.0894885					
C01		0.0894885					
C11		0.0140442					
<input type="checkbox"/> BIAXIAL							
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR							
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR							
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC							
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0						
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 6.57575						

SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS							
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr> <td>C10</td> <td>0.0894885</td> </tr> <tr> <td>C01</td> <td>0.0894885</td> </tr> <tr> <td>C20</td> <td>0.0140442</td> </tr> </table>	C10	0.0894885	C01	0.0894885	C20	0.0140442
C10		0.0894885					
C01		0.0894885					
C20		0.0140442					
<input type="checkbox"/> BIAXIAL							
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR							
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR							
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC							
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0						
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 6.57575						

THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS											
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr> <td>C10</td> <td>0.0925489</td> </tr> <tr> <td>C01</td> <td>0.0864598</td> </tr> <tr> <td>C11</td> <td>0.011156</td> </tr> <tr> <td>C20</td> <td>0.00287998</td> </tr> <tr> <td>C30</td> <td>0</td> </tr> </table>	C10	0.0925489	C01	0.0864598	C11	0.011156	C20	0.00287998	C30	0
C10		0.0925489									
C01		0.0864598									
C11		0.011156									
C20		0.00287998									
C30		0									
<input type="checkbox"/> BIAXIAL											
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR											
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR											
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC											
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA											
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS											
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION	BULK MODULUS 0										
<input checked="" type="checkbox"/> RELATIVE ERROR	ERROR 6.57576										

YEON CONTROL PARAMETERS							
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS <table border="1"> <tr> <td>C10</td> <td>0.179012</td> </tr> <tr> <td>C20</td> <td>0.0140355</td> </tr> <tr> <td>C30</td> <td>0</td> </tr> </table>	C10	0.179012	C20	0.0140355	C30	0
C10		0.179012					
C20		0.0140355					
C30		0					
<input type="checkbox"/> BIAXIAL							
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR							
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR							
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC							
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0						
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 6.57576						
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION							
<input checked="" type="checkbox"/> RELATIVE ERROR							

COMPUTE	APPLY	RESET	OK	EVALUATE
---------	-------	-------	----	----------

OGDEN CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	Δ a/a_0	Δ U/U_0
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	Δ t/t_0	Δ U/U_0
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	Δ t/t_0	Δ U/U_0
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR		
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC		
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA		

NUMBER OF TERMS

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

☐ MATHEMATICAL CHECKS

☐ EXTRAPOLATION

▼ RELATIVE ERROR

ERROR LIMIT

NUMBER OF ITERATIONS

CONVERGENCE TOLERANCE

COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	0.246463	2.89162
2	2.51559	3.60105e-006
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS

ERROR

OGDEN CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	Δ a/a_0	Δ U/U_0
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	Δ t/t_0	Δ U/U_0
<input checked="" type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	Δ t/t_0	Δ U/U_0
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR		
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC		
<input type="checkbox"/> USE ALL DATA		

NUMBER OF TERMS

☒ POSITIVE COEFFICIENTS

☐ MATHEMATICAL CHECKS

☐ EXTRAPOLATION

▼ RELATIVE ERROR

ERROR LIMIT

NUMBER OF ITERATIONS

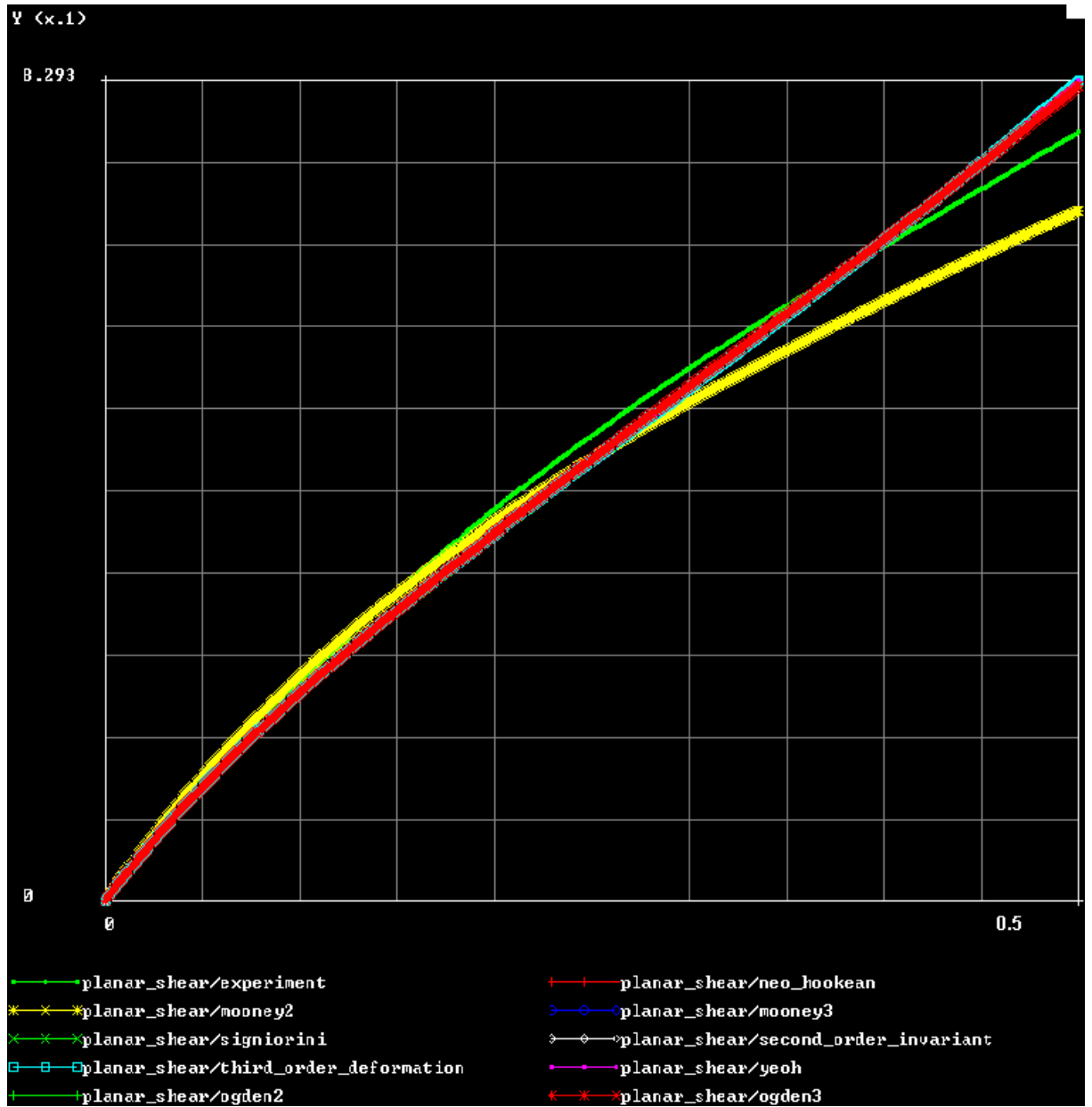
CONVERGENCE TOLERANCE

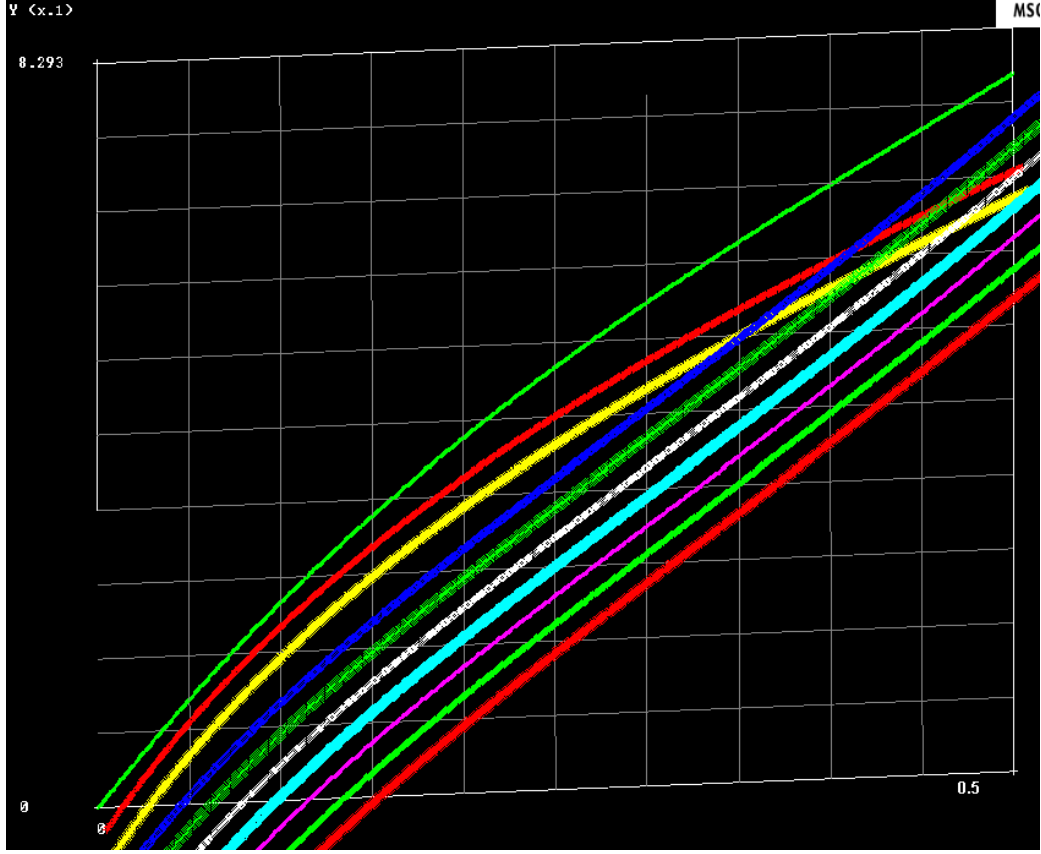
COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	6.73185e-006	0.569619
2	0.246473	2.89162
3	1.78316	3.58506e-006
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS

ERROR





Her Üç Temel Gerilme Durumu İçin Ortak Olarak Geliştirilen Malzeme Modelleri

Alt alta yerleştirilmiş hata oranı pencerelerinde, eğri denklemine air katsayıları aynı olanların , doğal olarak grafikleri de aynı olmaktadır , bundan dolayı, ilgili beş gerinim oranına ait hata oranı penceresinde katsayıları aynı görünen malzeme tiplerinin (artı katsayılar yöntemi etkin kılındığı için böyle olmaktadır.) grafikleri ortak tek bir grafik halinde sunulacaktır Bu artı katsayılar yönteminin, kestirilen modül tensörü değerlerine nasıl etkidiği , %10 gerinime ait 3. dereceden biçim değiştirme yaklaşımında örneklendirilmiştir.

%10'luk Gerinim

NEO-HOOKEAN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAxIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☒ RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS
 C10 0.0542558
 BULK MODULUS 0
 ERROR 64.1314

COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE

MOONEY<2> CONTROL PARAMETERS	
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS C10 0.0542526 C01 0
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input checked="" type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0 ERROR 64.1314

MOONEY<3> CONTROL PARAMETERS	
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS C10 0.0526842 C01 0 C11 0.000651864
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input checked="" type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0 ERROR 61.8542
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	

SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS	
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS C10 0.0496574 C01 0 C20 0.00319864
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input checked="" type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0 ERROR 55.9143
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	

SECOND ORDER INVARIANT CONTROL PARAMETERS	
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS C10 0.0496705 C01 0 C11 0 C20 0.00319836
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input checked="" type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0 ERROR 55.9143
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION	

YECH CONTROL PARAMETERS	
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS C10 0.0496661 C20 0.00319358 C30 0
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input checked="" type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0 ERROR 55.9144
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION	
<input checked="" type="checkbox"/> RELATIVE ERROR	

COMPUTE	APPLY	RESET	OK	EVALUATE
---------	-------	-------	----	----------

THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION

COEFFICIENTS

C10 0.0496642
 C01 0
 C11 0
 C20 0.00320116
 C30 0

BULK MODULUS 0

ERROR 55.9143

THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA

☐ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☒ RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS

C10 0.096105
 C01 -0.0517278
 C11 0.0130707
 C20 0.00493874
 C30 -0.00404529

BULK MODULUS 0

ERROR 16.8453

COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL $\blacktriangle A/A_0$ $\blacklozenge U/U_0$
☐ BIAXIAL $\blacktriangle t/t_0$ $\blacklozenge U/U_0$
☐ PLANAR SHEAR $\blacktriangle t/t_0$ $\blacklozenge U/U_0$
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA

NUMBER OF TERMS 2
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION
☒ RELATIVE ERROR

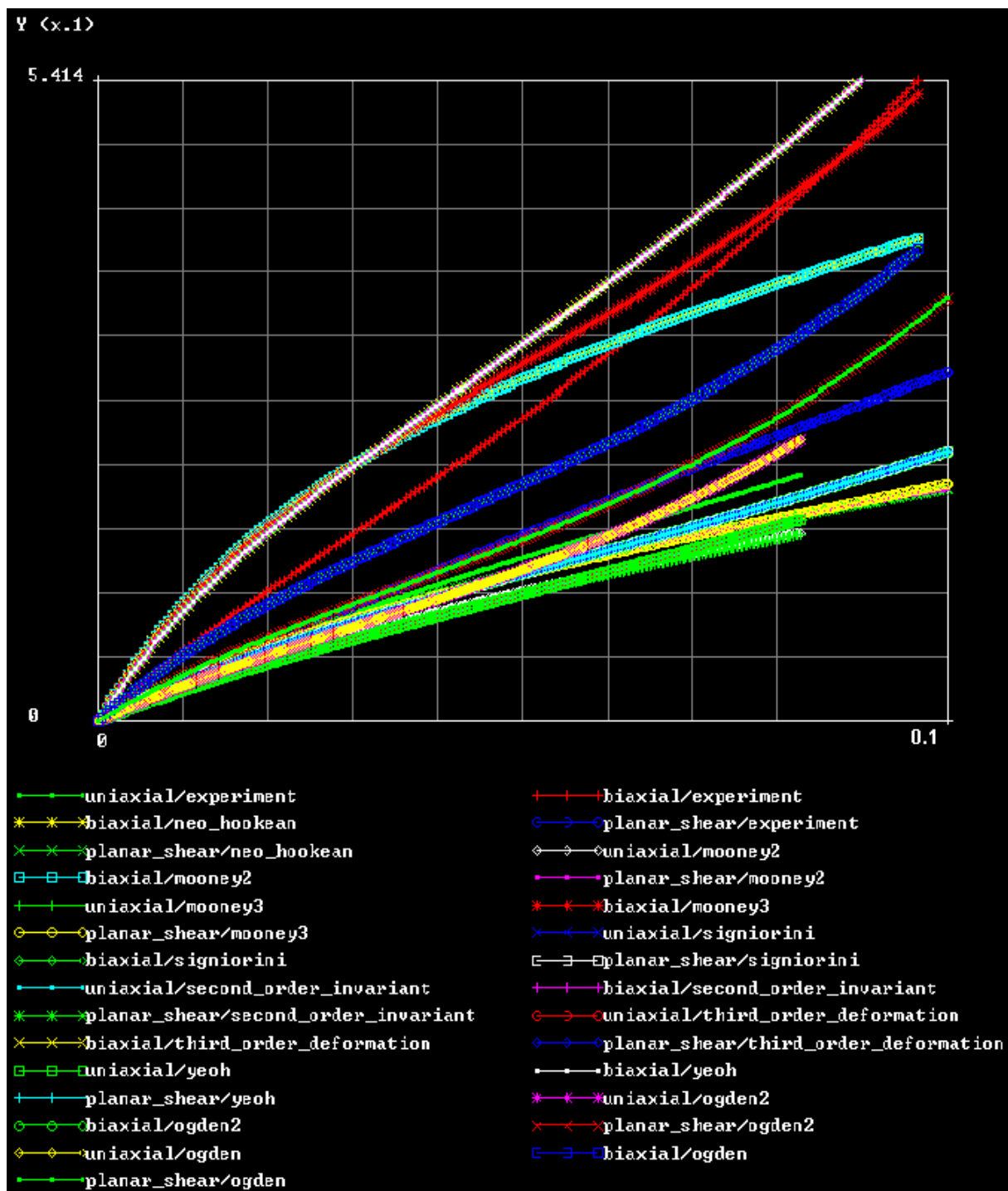
ERROR LIMIT 0.001
 NUMBER OF ITERATIONS 20
 CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

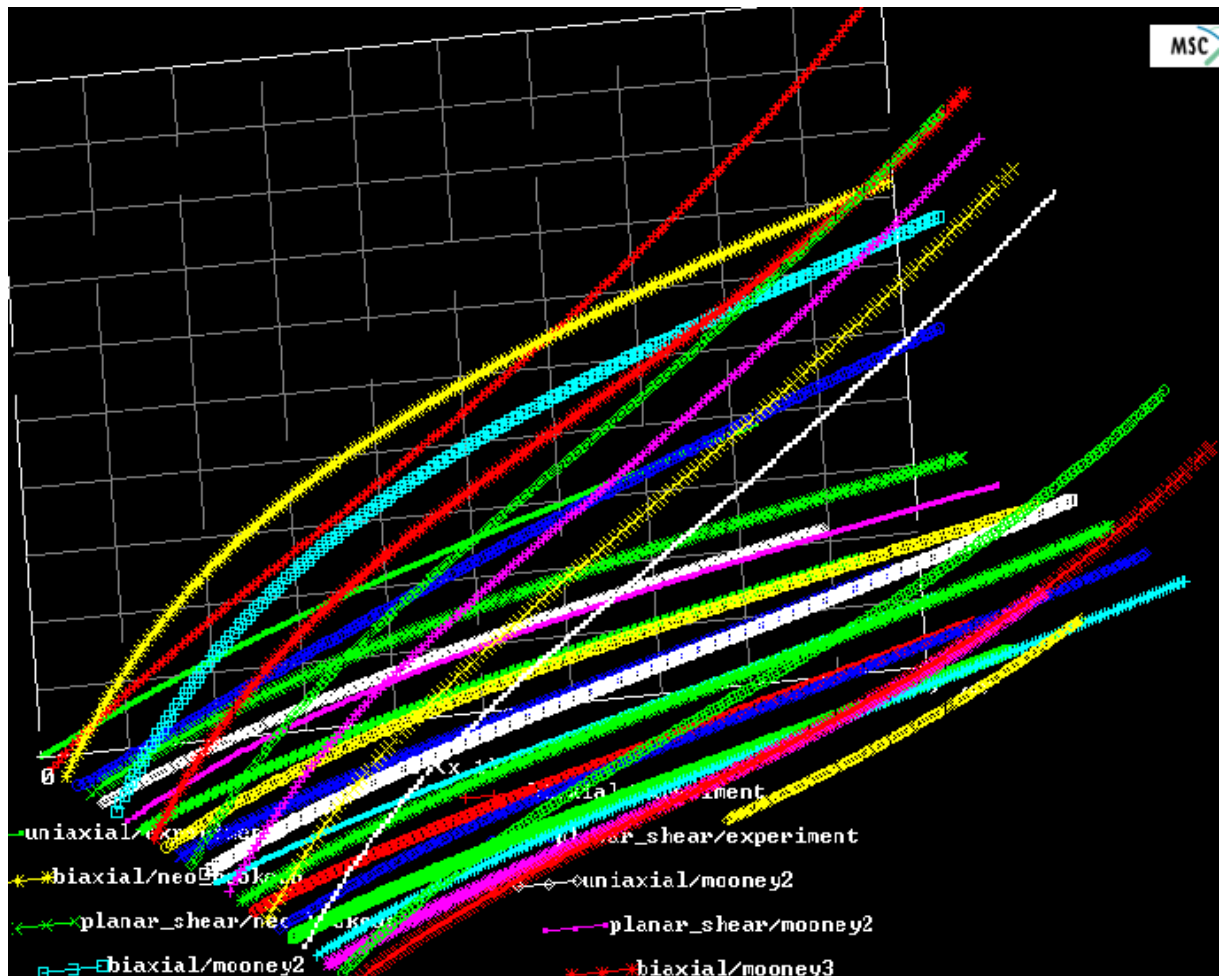
COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	0.00846888	5.96492
2	5.94979	0.0306085
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS 581.576
 ERROR 27.9783

COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE





%20'lik Gerinim

NEO-HOOKEAN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS
 C10 0.0980349
 BULK MODULUS 5
 ERROR 92.036

MOONEY<2> CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA
☒ POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS
C10 0.0980369
C01 0
BULK MODULUS 0
ERROR 92.036

MOONEY<3> CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA
☒ POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS
C10 0.098041
C01 0
C11 0
BULK MODULUS 0
ERROR 92.036

SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA
☒ POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS
C10 0.0958153
C01 0
C20 0.00145959
BULK MODULUS 0
ERROR 91.1096

SECOND ORDER INVARIANT CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION

COEFFICIENTS
C10 0.0958224
C01 0
C11 0
C20 0.00145086
BULK MODULUS 0
ERROR 91.1095

THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☒ RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS
C10 0.095818
C01 0
C11 0
C20 0.00145562
C30 0
BULK MODULUS 0
ERROR 91.1095

COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE

YEON CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAxIAL
☐ BIAxIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR

COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE

COEFFICIENTS

C10 0.0958213
 C20 0.00145164
 C30 0

BULK MODULUS 0
 ERROR 91.1095

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAxIAL $\blacktriangle A/A0$ $\blacktriangledown U/U0$
☐ BIAxIAL $\blacktriangle t/t0$ $\blacktriangledown U/U0$
☐ PLANAR SHEAR $\blacktriangle t/t0$ $\blacktriangledown U/U0$
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA

NUMBER OF TERMS 2
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR
 ERROR LIMIT 0.001
 NUMBER OF ITERATIONS 20
 CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE

COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	98.8578	0.00283724
2	0.0290922	4.61315
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS 1036.72
 ERROR 17.873

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAxIAL $\blacktriangle A/A0$ $\blacktriangledown U/U0$
☐ BIAxIAL $\blacktriangle t/t0$ $\blacktriangledown U/U0$
☐ PLANAR SHEAR $\blacktriangle t/t0$ $\blacktriangledown U/U0$
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA

NUMBER OF TERMS 3
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR
 ERROR LIMIT 0.001
 NUMBER OF ITERATIONS 20
 CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

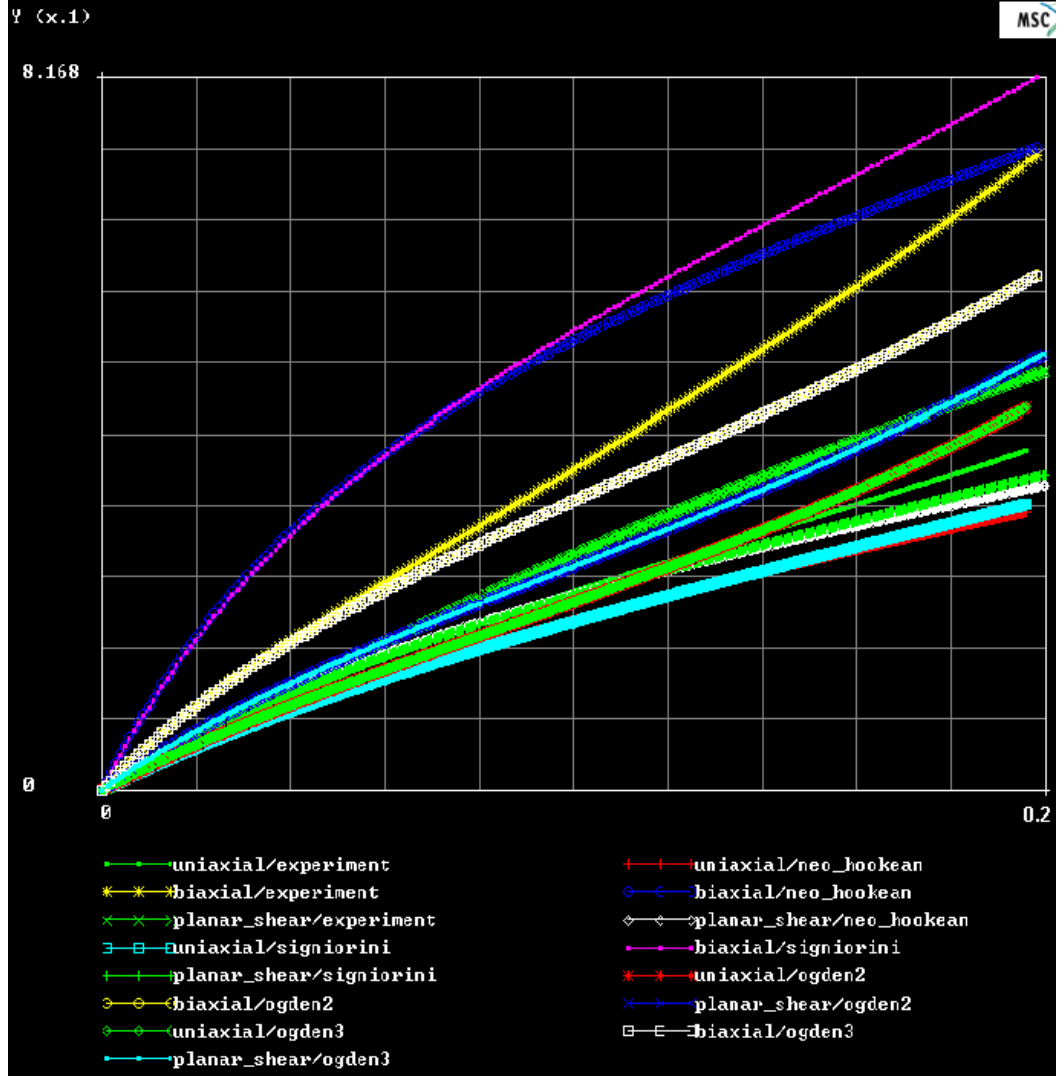
COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE

COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	8.77876	0.0280402
2	0.0284317	4.64147
3	1.30354	0.0281056
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS 1036.9
 ERROR 17.976

Bu gerinim için, OGDEN2 ve 3'ün hata oranı pencerelerinde , katsayı adedi farklı da olsa , eğriye büyük ölçüde etkiyen katsayıların yakın değerinde ve her iki malzeme modeli tipine ait eğrilerin birbirlerine hemen hemen çakışık olduğu gözlemlenmiştir. Takip eden gerinimler için benzeri durumlarda OGDEN2 veya 3 arasında, hata oranı en az , dolayısıyla deneysel veriye en yakın olan tek bir tanesinin hata penceresi ve grafiği sunulacaktır.



%30'luk Gerinim

NEO-HOOKEAN CONTROL PARAMETERS

<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	C10 0.133242
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	BULK MODULUS 0
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	ERROR 91.4375
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input checked="" type="checkbox"/> USE ALL DATA	
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION	
<input checked="" type="checkbox"/> RELATIVE ERROR	
COMPUTE	APPLY
RESET	OK
EVALUATE	

MOONEY<2> CONTROL PARAMETERS	
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS C10 0.133245 C01 0
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input checked="" type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 91.4375

MOONEY<3> CONTROL PARAMETERS	
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS C10 0.133236 C01 0 C11 0
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input checked="" type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 91.4375

SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS	
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS C10 0.133239 C01 0 C20 0
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input checked="" type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 91.4375

SECOND ORDER INVARIANT CONTROL PARAMETERS	
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS C10 0.13324 C01 0 C11 0 C20 0
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input checked="" type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 91.4375
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION	

THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS	
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS C10 0.13323 C01 0 C11 0 C20 0 C30 0
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input checked="" type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 91.4375
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION	
<input type="checkbox"/> RELATIVE ERROR	

COMPUTE	APPLY	RESET	OK	EVALUATE
---------	-------	-------	----	----------

YEON CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA
☒ POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS

C10	0.133232
C20	0
C30	0

BULK MODULUS 0
 ERROR 91.4375

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL $\blacktriangle A/A_0$ $\blacktriangle U/U_0$
☐ BIAXIAL $\blacktriangle t/t_0$ $\blacktriangle U/U_0$
☐ PLANAR SHEAR $\blacktriangle t/t_0$ $\blacktriangle U/U_0$
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA

NUMBER OF TERMS 2
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION
 ▼ RELATIVE ERROR
 ERROR LIMIT 0.001
 NUMBER OF ITERATIONS 20
 CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	0.0527318	4.14715
2	11.5837	0.0314547
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS 1457.62
 ERROR 5.74327

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL $\blacktriangle A/A_0$ $\blacktriangle U/U_0$
☐ BIAXIAL $\blacktriangle t/t_0$ $\blacktriangle U/U_0$
☐ PLANAR SHEAR $\blacktriangle t/t_0$ $\blacktriangle U/U_0$
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA

NUMBER OF TERMS 3
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION
 ▼ RELATIVE ERROR
 ERROR LIMIT 0.001
 NUMBER OF ITERATIONS 20
 CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

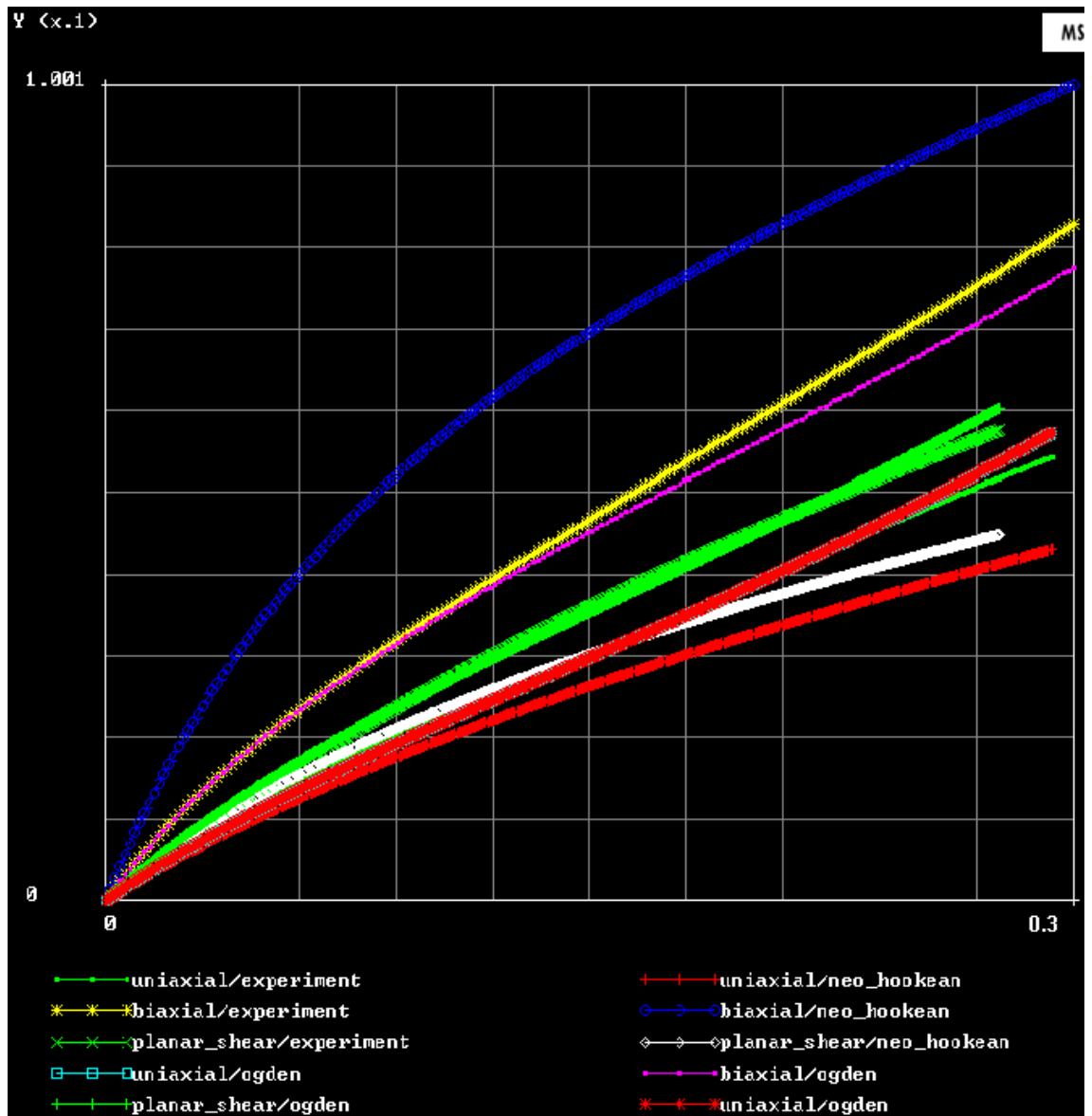
COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	3.53999	0.0240854
2	5.12141	0.0550975
3	0.0517674	4.16866
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS 1458.1
 ERROR 5.76306

COMPUTE APPLY RESET OK

EVALUATE



%40'lık Gerinim

NEO-HOOKEAN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☒ RELATIVE ERROR

COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE

COEFFICIENTS
 C10 0.158732
 BULK MODULUS 0
 ERROR 118.161

MOONEY<2> CONTROL PARAMETERS	
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS C10 0.158725 C01 0
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input checked="" type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 118.161

MOONEY<3> CONTROL PARAMETERS	
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS C10 0.158728 C01 0 C11 0
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input checked="" type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 118.161

SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS	
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS C10 0.158725 C01 0 C20 0
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input checked="" type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 118.161

SECOND ORDER INVARIANT CONTROL PARAMETERS	
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS C10 0.15874 C01 0 C11 0 C20 0
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input checked="" type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 118.161
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION	

THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS	
<input type="checkbox"/> UNIAXIAL	COEFFICIENTS C10 0.158728 C01 0 C11 0 C20 0 C30 0
<input type="checkbox"/> BIAXIAL	
<input type="checkbox"/> PLANAR SHEAR	
<input type="checkbox"/> SIMPLE SHEAR	
<input type="checkbox"/> VOLUMETRIC	
<input checked="" type="checkbox"/> USE ALL DATA	BULK MODULUS 0
<input checked="" type="checkbox"/> POSITIVE COEFFICIENTS	ERROR 118.161
<input type="checkbox"/> EXTRAPOLATION	
<input type="checkbox"/> RELATIVE ERROR	

COMPUTE	APPLY	RESET	OK	EVALUATE
---------	-------	-------	----	----------

YEON CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☒ RELATIVE ERROR

COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE

COEFFICIENTS

C10 0.158738
 C20 0
 C30 0

BULK MODULUS 0
 ERROR 118.161

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL $\blacktriangle A/A0$ $\blacktriangle U/U0$
☐ BIAXIAL $\blacktriangle t/t0$ $\blacktriangle U/U0$
☐ PLANAR SHEAR $\blacktriangle t/t0$ $\blacktriangle U/U0$
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA

NUMBER OF TERMS 2
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION
☒ RELATIVE ERROR

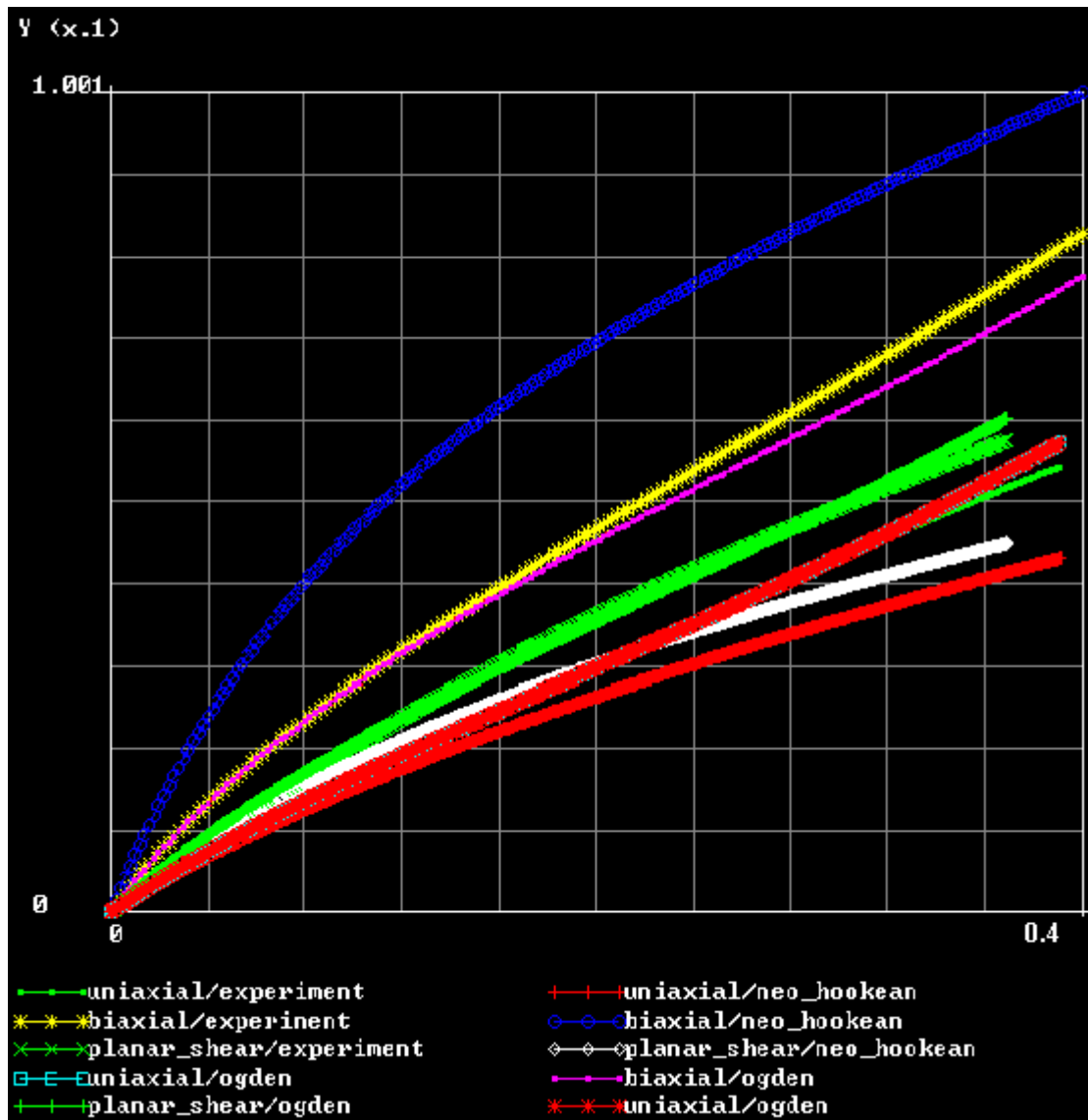
ERROR LIMIT 0.001
 NUMBER OF ITERATIONS 20
 CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE

COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	13.096	0.0131247
2	0.203126	2.75201
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS 1827.21
 ERROR 5.02996



%50'lik Gerinim

NEO-HOOKEAN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☐ SIMPLE SHEAR
☐ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA

☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS
 C10 0.174067
 BULK MODULUS 0
 ERROR 99.3103

COMPUTE APPLY RESET OK EVALUATE

MOONEY<3> CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA
☒ POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS

C10 0.174073
C01 0
C11 0

BULK MODULUS 0
ERROR 99.3103

YEON CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA
☒ POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS

C10 0.168919
C20 0
C30 0

BULK MODULUS 0
ERROR 123.575

SIGNIORINI CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA
☒ POSITIVE COEFFICIENTS

COEFFICIENTS

C10 0.174063
C01 0
C20 0

BULK MODULUS 0
ERROR 99.3103

SECOND ORDER INVARIANT CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION

COEFFICIENTS

C10 0.174072
C01 0
C11 0
C20 0

BULK MODULUS 0
ERROR 99.3103

THIRD ORDER DEFORMATION CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☒ USE ALL DATA
☒ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☒ RELATIVE ERROR

COEFFICIENTS

C10 0.174064
C01 0
C11 0
C20 0
C30 0

BULK MODULUS 0
ERROR 99.3103

COMPUTE
APPLY
RESET
OK

EVALUATE

313

YEON CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL
☐ BIAXIAL
☐ PLANAR SHEAR
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

☐ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR

COMPUTE APPLY RESET OK

COEFFICIENTS

C10 0.174058
 C20 0
 C30 0

BULK MODULUS 0
 ERROR 99.3103

EVALUATE

OGDEN CONTROL PARAMETERS

☐ UNIAXIAL $\blacktriangle A/A0$ $\blacktriangle U/U0$
☐ BIAXIAL $\blacktriangle t/t0$ $\blacktriangle U/U0$
☐ PLANAR SHEAR $\blacktriangle t/t0$ $\blacktriangle U/U0$
☒ SIMPLE SHEAR
☒ VOLUMETRIC
☐ USE ALL DATA

NUMBER OF TERMS 2
☐ POSITIVE COEFFICIENTS
☐ MATHEMATICAL CHECKS
☐ EXTRAPOLATION
☐ RELATIVE ERROR

ERROR LIMIT 0.001
 NUMBER OF ITERATIONS 20
 CONVERGENCE TOLERANCE 1e-006

COMPUTE APPLY RESET OK

COEFFICIENTS

	MODULI	EXPONENTS
1	12.245	0.0273505
2	0.136729	3.23695
3	0	0
4	0	0
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0
9	0	0
10	0	0

BULK MODULUS 1943.73
 ERROR 11.7381

EVALUATE

